

# REPORT

Cicerostr. 24  
D-10709 Berlin  
Germany  
Tel +49 (0)30 536 53 800  
Fax +49 (0)30 536 53 888  
www.kompetenz-wasser.de

## Entwicklung eines Optimierungsmodells für die Abwasserverteilung in Berlin und Implementierung im algebraischen Modellierungssystem GAMS Project acronym: EVA

by

Prof. Dr. Marc Steinbach, Dipl. Math.-Oec. Klaas Eggert  
Institut für Angewandte Mathematik, Leibniz Universität Hannover

Mathias Weege  
Abteilung Optimierung, Zuse-Institut Berlin

for

Kompetenzzentrum Wasser Berlin gGmbH

Preparation of this report was financed in part through funds provided by



Berlin, Germany

January 2008

## **Important Legal Notice**

**Disclaimer:** The information in this publication was considered technically sound by the consensus of persons engaged in the development and approval of the document at the time it was developed. KWB disclaims liability to the full extent for any personal injury, property, or other damages of any nature whatsoever, whether special, indirect, consequential, or compensatory, directly or indirectly resulting from the publication, use of application, or reliance on this document.

KWB disclaims and makes no guaranty or warranty, expressed or implied, as to the accuracy or completeness of any information published herein. It is expressly pointed out that the information and results given in this publication may be out of date due to subsequent modifications. In addition, KWB disclaims and makes no warranty that the information in this document will fulfill any of your particular purposes or needs.

The disclaimer on hand neither seeks to restrict nor to exclude KWB's liability against all relevant national statutory provisions.

---

## **Wichtiger rechtlicher Hinweis**

**Haftungsausschluss** Die in dieser Publikation bereitgestellte Information wurde zum Zeitpunkt der Erstellung im Konsens mit den bei Entwicklung und Anfertigung des Dokumentes beteiligten Personen als technisch einwandfrei befunden. KWB schließt vollumfänglich die Haftung für jegliche Personen-, Sach- oder sonstige Schäden aus, ungeachtet ob diese speziell, indirekt, nachfolgend oder kompensatorisch, mittelbar oder unmittelbar sind oder direkt oder indirekt von dieser Publikation, einer Anwendung oder dem Vertrauen in dieses Dokument herrühren.

KWB übernimmt keine Garantie und macht keine Zusicherungen ausdrücklicher oder stillschweigender Art bezüglich der Richtigkeit oder Vollständigkeit jeglicher Information herein. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die in der Publikation gegebenen Informationen und Ergebnisse aufgrund nachfolgender Änderungen nicht mehr aktuell sein können. Weiterhin lehnt KWB die Haftung ab und übernimmt keine Garantie, dass die in diesem Dokument enthaltenen Informationen der Erfüllung Ihrer besonderen Zwecke oder Ansprüche dienlich sind.

Mit der vorliegenden Haftungsausschlussklausel wird weder bezweckt, die Haftung der KWB entgegen den einschlägigen nationalen Rechtsvorschriften einzuschränken noch sie in Fällen auszuschließen, in denen ein Ausschluss nach diesen Rechtsvorschriften nicht möglich ist.

## **Abstract (English)**

### **EVA - Implementation of a decision support system for global control of sewage pump stations and analysis of advanced control concepts**

Duration: 04/2006 – 03/2008  
Volume: 620.000 €  
Contractors: Konrad-Zuse-Zentrum Berlin, FU Berlin – Institut für Meteorologie,  
TU Berlin – FG Siedlungswasserwirtschaft  
Contact at KWB: Kai Schroeder

### **Work Package 3 – Development of an optimisation model for wastewater distribution in Berlin and implementation in the algebraic modeling system GAMS**

The objective of work package 3 of the EVA project was the development of an optimisation model of the Berlin wastewater system, covering the collection system, pump stations, pressure mains and wastewater treatment plants, and the implementation of the model within the algebraic modeling system GAMS (General Algebraic Modeling System). GAMS should be used to identify by mathematical optimisation strategies for the distribution of wastewater within the pressurized network during rain. Actuating variables of the optimisation are flow rates and pressure differences at the pump stations and at the sluice gates within the pressurized network.

This report gives a detailed description of the work carried out at Konrad-Zuse-Zentrum Berlin and the Institute of Applied Mathematics of Leibniz University Hannover. The report is structured as follows:

- Overview of the Berlin wastewater system, problem definition, description of the technical facilities covered by the model, data basis of the optimisation model
- Mathematical modelling of the system and its components, where applicable alternative model approaches, evaluation of the model properties
- Mathematical approaches and solution methods with evaluation of advantages and disadvantages, difficulties, summary.

During data collection it turned out that concerning the modeling and solution in GAMS the wastewater system was more complex than initially foreseen. This holds true especially for the gravity sewer networks. Ancillary structures like weirs, throttles and siphons lead to condition-based discontinuities within the system that can be adequately modeled in GAMS only by means of integer variables. This leads to a mixed-integer non-linear optimisation problem (MINLP) of high dimension, which is mathematically and in terms of computational effort extremely difficult to solve. Therefore, the identification of control strategies for the distribution of wastewater within the pressurized network could not yet be carried out.

Furthermore, the extensiveness of the model poses a challenge: The current version contains app. 3 million optimisation variables (200000 integer variables) and app. one million constraints. Hence, compared with MNL models, which could successfully be solved, this model is larger by the factor 100 (app.). It was tried to solve the model with the MINLP solver *Bonmin* in combination with the NLP (non-linear program) solver *Ipopt*. As expected these attempts were without success until now.

It can be concluded that the model of the Berlin wastewater system that was set up in the frame of the EVA study cannot be solved presently by standard optimisation tools. Further numerical research will be necessary to use the model in the designated way. At the same time a further simplification of the model components for the sewer system will be discussed.

## **Abstract (German)**

### **EVA - Umsetzung eines Entscheidungshilfesystems zur Verbundsteuerung von Abwasserpumpwerken und Analyse weitergehender Steuerungsvarianten**

Dauer: 04/2006 – 03/2008  
Volumen: 620.000 €  
Vertragspartner: Konrad-Zuse-Zentrum Berlin, FU Berlin – Institut für Meteorologie, TU Berlin – FG Siedlungswasserwirtschaft  
Kontakt im KWB: Kai Schroeder

### **Arbeitspaket 3 – Entwicklung eines Optimierungsmodells für die Abwasserverteilung in Berlin und Implementierung im algebraischen Modellierungssystem GAMS**

Zielstellung des im Rahmen des EVA Projekts durchgeführten Arbeitspaketes 3 war die Entwicklung eines Optimierungsmodells des Berliner Abwassersystems, bestehend aus Kanalnetzen, Abwasserdruckleitungsnetz und Kläranlagen, sowie die Implementierung des Modells im algebraischen Modellierungssystem GAMS (General Algebraic Modeling System). Auf dieser Basis sollten mittels mathematischer Optimierung Strategien zur Steuerung der Abwasserströme innerhalb des Abwasserdruckleitungsnetzes während Niederschlags ermittelt werden mit dem Ziel, eine flexible, variable Beschickung der Kläranlagen zu ermöglichen. Stellgrößen für die Optimierung sind die Volumenströme oder Druckdifferenzen in den Pumpwerken und an den Schiebern im Abwasserdruckleitungsnetz.

Dieser Abschlussbericht beschreibt detailliert die am Konrad-Zuse-Zentrum Berlin und am Institut für Angewandte Mathematik der Leibniz Universität Hannover durchgeführten Arbeiten. Er lässt sich gliedern in folgende Abschnitte:

- Gesamtüberblick des Berliner Abwassersystems, Aufgabenstellung und Beschreibung der abwassertechnischen Anlagen, Daten für das Optimierungsmodell

- mathematische Modellierung des Gesamtsystems und der Komponenten, ggf. alternative Modellierungsmöglichkeiten, Beurteilung der jeweiligen Modelleigenschaften
- mathematische Ansätze und Lösungsmethoden mit Beurteilung ihrer Vorteile, Nachteile und Schwierigkeiten, Zusammenfassung.

Während der Datenerhebung stellte sich heraus, dass das Abwassersystem hinsichtlich der Modellierung und Lösung in GAMS wesentlich komplexer ist, als es zunächst absehbar war. Dies betrifft insbesondere die Kanalnetze: hier verursachen Sonderbauwerke, wie Drosseln, Wehre und Heber zustandsabhängige Unstetigkeiten, die sich in GAMS nur mittels ganzzahliger Optimierungsvariablen adäquat modellieren lassen. Dadurch entsteht ein gemischt-ganzzahliges nichtlineares Optimierungsmodell (MINLP für engl. mixed-integer non-linear program) sehr hoher Dimension, das mathematisch wie rechentechnisch extrem schwierig zu lösen ist. So konnte bisher keine optimale Bewirtschaftungsstrategie ermittelt werden.

Auch die Größe des Modells stellt eine Herausforderung dar: in der aktuellen Formulierung existieren in etwa 3 Millionen Optimierungsvariablen (davon gut 200.000 ganzzahlige) und etwa eine Million Beschränkungen (plus einfache Schranken). Somit ist das Modell etwa um einen Faktor hundert größer als bisher erfolgreich gelöste MINLP-Modelle. Es wurde versucht, das Abwassermodell mit dem MINLP-Löser *Bonmin* in Kombination mit dem NLP-Löser *Ipopt* in GAMS zu lösen (NLP für engl. non-linear program), erwartungsgemäß allerdings bisher erfolglos.

Als Fazit bleibt festzuhalten, dass das im Rahmen dieser Studie erstellte Abwassermodell mit Standard-Optimierungstools derzeit nicht lösbar ist. Die angestrebten Untersuchungen erfordern zunächst weitere Forschungsarbeit, um das Modell einer numerischen Behandlung zugänglich zu machen. Außerdem wird eine weitergehende Vereinfachung der Beschreibung der Kanalnetzbausteine im Modell diskutiert.

# Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung .....	1
2 Ziele .....	1
3 Vorarbeiten.....	2
4 Abwasserentsorgung in Berlin .....	2
5 Systemdaten .....	3
5.1 Kanalnetze und Pumpwerke .....	3
5.2 Abwasserdruckleitungsnetz .....	7
5.3 Kläranlagen .....	8
6 Mathematische Modellierung.....	8
6.1 Modellierung des gesamten Abwassersystems.....	9
6.1.1 Zeitdiskretisierung .....	9
6.1.2 Dynamische Variablen.....	9
6.2 Modellierung des Kanalnetzes .....	10
6.2.1 Netzwerktopologie .....	10
6.2.2 Dynamische Variablen.....	10
6.2.3 Modellierung der Becken.....	11
6.2.4 Pumpen, Überläufe, Heber, Drosseln und Schieber .....	12
6.2.5 Speicherkennlinien .....	22
6.3 Abwasserdruckleitungsnetz .....	22
6.4 Klärwerke.....	24
7 Mathematische Lösungsansätze und Techniken .....	24
7.1 Zustandsabhängige Unstetigkeiten.....	25
7.2 Variablensplitting .....	26
8 Zusammenfassung.....	27
Literatur.....	28



# Entwicklung eines Optimierungsmodells für die Abwasserverteilung in Berlin und Implementierung im algebraischen Modellierungssystem GAMS

PROF. DR. MARC STEINBACH

Institut für Angewandte Mathematik (IfAM), Leibniz Universität Hannover

DIPL. MATH.-OEC. KLAAS EGGERT

Institut für Angewandte Mathematik (IfAM), Leibniz Universität Hannover

MATHIAS WEEGE

Abteilung Optimierung, Zuse-Institut Berlin (ZIB)

## 1 Einleitung

In Siedlungsgebieten fallen häusliches und gewerbliches Schmutzwasser sowie in Abhängigkeit vom Versiegelungsgrad erhebliche Mengen an Niederschlagswasser an. Seit Mitte der 70er Jahre wurde die Abflusssteuerung angewandt, um gezielt vorhandene Entwässerungseinrichtungen zu bewirtschaften und somit die Kapazität der zuvor rein statischen Systeme möglichst vollständig zu nutzen. Die Entwicklung der integrierten Steuerung von Kanalnetz und Kläranlage wurde in den letzten zehn Jahren vorangetrieben, wenngleich eine betriebliche Umsetzung für große, komplexe Systeme nach wie vor kaum realisiert wurde. Aus diesem Grund wurde das Forschungsprojekt EVA durchgeführt, das neben der Entwicklung und Erprobung eines Entscheidungshilfesystems zur Verbundsteuerung von Abwasserpumpwerken die Untersuchung weitergehender Steuerungsmöglichkeiten des Berliner Entwässerungssystems zum Ziel hatte.

## 2 Ziele

Aufgabe des Arbeitspaketes 3 des EVA Projektes war die Entwicklung eines Optimierungsmodells des Berliner Abwassersystems, bestehend aus Kanalnetzen, Abwasserdruckleitungsnetz und Kläranlagen, sowie die Implementierung des Modells im algebraischen Modellierungssystem GAMS. Auf dieser Basis sollten mittels mathematischer Optimierung Strategien zur Steuerung der Abwasserströme innerhalb des Abwasserdruckleitungsnetzes während Niederschlags ermittelt werden mit dem Ziel, eine flexible, variable Beschickung der Kläranlagen zu ermöglichen. Stellgrößen für die Optimierung sind die Volumenströme oder Druckdifferenzen in den Pumpwerken und an den Schiebern im Abwasserdruckleitungsnetz.

Dieser Abschlussbericht beschreibt detailliert die am ZIB und am IfAM durchgeführten Arbeiten. Er lässt sich grob gliedern in folgende Abschnitte:

- Gesamtüberblick zum Berliner Abwassersystem, Aufgabenstellung und Beschreibung der abwassertechnischen Anlagen, Daten für das Optimierungsmodell;
- mathematische Modellierung des Gesamtsystems und der Komponenten, ggf. alternative Modellierungsmöglichkeiten, Beurteilung der jeweiligen Modelleigenschaften;
- mathematische Ansätze und Lösungsmethoden mit Beurteilung ihrer Vorteile, Nachteile und Schwierigkeiten, Zusammenfassung.

Während der Datenerhebung stellte sich heraus, dass das Abwassersystem hinsichtlich der Modellierung und Lösung in GAMS wesentlich komplexer ist, als es zunächst absehbar war. Dies betrifft insbesondere die Kanalnetze: hier verursachen Drosseln und Heber zustandsabhängige Unstetigkeiten, die sich in GAMS nur mittels ganzzahliger Optimierungsvariablen adäquat modellieren lassen. Dadurch entsteht ein *gemischt-ganzzahliges nichtlineares* Optimierungsmodell sehr hoher Dimension, das mathematisch wie rechentechnisch extrem schwierig zu lösen ist. So konnte bisher keine optimale Bewirtschaftungsstrategie ermittelt werden.

### 3 Vorarbeiten

Bei KWB wurde das Forschungsprojekt *Integriertes Abwassermanagement* durchgeführt (Integrated Sewage Management – ISM).

Im Auftrag von ABB hat das ZIB ein Optimierungsmodul zur Betriebsplanung der Trinkwasserversorgung bei BWB entwickelt [5, 6]. Zu dieser Thematik hat das ZIB zusammen mit BWB einige weitere Forschungsarbeiten durchgeführt [4, 2, 3, 7]; schließlich entstand parallel zum Projekt EVA eine Diplomarbeit [8].

### 4 Abwasserentsorgung in Berlin

Die Abwasserentsorgung in Berlin wird durch ein 9.360 km langes Kanalisationsnetz mit 233.000 Anschlussleitungen, 145 Pumpwerke und ein mehr als 1.120 km langes Abwasserdruckleitungsnetz sowie sechs Klärwerke ermöglicht.

Das Berliner Kanalnetz umfasst 4.178 km Schmutzwasserkanäle, 3.212 km Regenwasserkanäle und 1.902 km Mischwasserkanäle sowie zahlreiche Sonderbauwerke wie Regenüberläufe und Regenbecken. Etwa drei Viertel der kanalisierten Gebiete werden nach dem Trennverfahren und ein Viertel nach dem Mischverfahren entwässert.

Im Trennsystem werden Schmutz- und Regenwasser in zwei voneinander getrennten Kanalisationsystemen abgeleitet. Die Schmutzwasserkanäle leiten das häusliche, gewerblich und industrielle Abwasser zu den Pumpwerken, die es dann zu den Klärwerken fördern. Sollte in einem Havariefall die Speicherkapazität nicht ausreichen, so erfolgt über den Notauslass die Entwässerung. Dies tritt äußerst selten auf. Die Regenwasserkanäle nehmen die Niederschläge auf, die auf Straßen, Dächern und Höfen fallen, ebenso Kühlwasser aus Betrieben oder das Wasser von Entwässerungsgräben. Sie leiten dieses Wasser in das nächste öffentliche Gewässer. Zur Reinigung des Regenwassers von Flächen mit hohem Schmutzpotential dienen Regenbecken und Bodenfilter an den Haupteinleitungsstellen.

Im Mischsystem werden Schmutz- und Regenwasser gemeinsam in einem Kanal abgeleitet. In diesem System befinden sich Regenüberläufe, Entlastungskanäle und Regenbecken, die bei starken Niederschlägen das Mischwasser speichern und zeitverzögert dem Klärwerk zuleiten oder das Mischwasser in ein naheliegendes Gewässer überleiten, wenn die Speicherkapazität erschöpft ist.

Die 145 über das Berliner Stadtgebiet verteilten Abwasserpumpwerke, die das Abwasser durch die Abwasserdruckleitungen zu den Klärwerken fördern, waren bislang in 13 Pumpwerksgruppen mit je einem Hauptpumpenwerk zusammengefasst. Von den Hauptpumpwerken wurden die Anschlusspumpwerke und Überpumpwerke überwacht und zum Teil ferngesteuert. Im Zuge der Systemautomatisierung wird zur Zeit die Überwachung und Steuerung der Anlagen auf eine Leitzentrale umgestellt. Die Haupt- und Anschlusspumpwerke fördern das Abwasser direkt zu den Reinigungsanlagen. Die Überpumpwerke heben dagegen das ihnen zufließende Abwasser in höher gelegene benachbarte Kanäle oder direkt in den Saugraum eines anderen Pumpwerkes.

Zur Abwasseraufbereitung sind in und um Berlin sechs Klärwerke an das Abwasserdruckleitungssystem angeschlossen. Diese unterscheiden sich in der Verfahrenstechnik und vor allem in ihrer Reinigungskapazität:

- Ruhleben: 247.500 m<sup>3</sup>/Tag
- Waßmannsdorf: 230.000 m<sup>3</sup>/Tag
- Schönerlinde: 105.000 m<sup>3</sup>/Tag
- Stahnsdorf: 47.000 m<sup>3</sup>/Tag
- Münchehofe: 42.500 m<sup>3</sup>/Tag
- Wansdorf: 40.000 m<sup>3</sup>/Tag

## 5 Systemdaten

Betrachtet wird nur der Teil des Abwassersystems der Berliner Wasserbetriebe (BWB) im Stadtgebiet Berlin, der für die Optimierung relevant ist. Dieser besteht aus:

- (1) teilweise getrennten Abwasserkanalnetzen für verschiedene Einzugsgebiete (Schmutzwassernetze, Mischwassernetze, Betrachtung des nahen Sanierungsstandes)
- (2) einem Abwasserpumpwerk je Kanalnetz/Einzugsgebiet
- (3) Abwasserdruckleitungsnetz (ADL-Netz)
- (4) Kläranlagen

Zur technischen Vereinfachung werden im Rahmen des Projekts nur die Einzugsgebiete berücksichtigt, die ihr Abwasser zu den Klärwerken Ruhleben (RUH), Schönerlinde (SCH) und Waßmannsdorf (WAS) fördern. Diese drei Klärwerke reinigen etwa 90% des Berliner Abwassers. Bei drei berücksichtigten Teilgebieten (Spa1, Stg, Bie1) erfolgt zusätzlich eine Förderung zu einer der kleineren Kläranlagen (Münchehofe, Stahnsdorf, Wansdorf) hin. Dieser Vorgang wird nicht zur Optimierung freigegeben; die Förderung wird bedarfsabhängig festgelegt und somit als Randbedingung berücksichtigt. Einzugsgebiete, die ausschließlich zu den kleinen Klärwerken fördern, werden demnach überhaupt nicht betrachtet.

### 5.1 Kanalnetze und Pumpwerke

Die Speichereigenschaft eines jeden Kanalnetzes wird über eine spezifische Speicherkennlinie (SKL), welche die Abhängigkeit des Wasserstands (Höhe in müNN) vom Volumen des Wasserinhalts angibt, modelliert. Pumpwerke gehören jeweils zu einem Kanalnetz bzw. Einzugsgebiet. Sie fördern das ihrem Saugraum zufließende Abwasser über Druckleitungen zu den Kläranlagen. Die Speicherkapazität des Saugraumes wird implizit mit der Speicherkennlinie des zugehörigen Kanalnetzes erfasst, so dass dieser modelltechnisch nicht berücksichtigt wird, sondern nur das Kanalnetz mit seinem Pumpwerk. Mit Ausnahme des Einzugsgebiets Waid beschickt nach Regelverteilung jedes Pumpwerk genau eine Kläranlage. Wie oben erwähnt, wird die Förderleistung zu den drei kleinen Klärwerken ggf. als Randbedingung berücksichtigt.

Dem Trennsystem können 28 der modellierten Einzugsgebiete zugeordnet werden. Diese bestehen aus dem Schmutzwasserkanalnetz mit Notauslass und dem zugehörigen Pumpwerk. Da die Regenwasserkanalisation keinen Einfluss auf die Pumpwerke und die Abwasserdruckleitungen nimmt, wird diese nicht mit modelliert.

Weitaus komplexer ist das Mischsystem, bei dem Schmutz- und Regenwasser gemeinsam in einem Kanal abgeleitet werden. Hierzu gehören 17 modellierte Einzugsgebiete. Ein Sonderfall ist Nkn 2. Dieses Kanalnetz besteht aus zwei gekoppelten Teilnetzen, wobei eines dem Trennsystem und das andere dem Mischsystem angehört. Im Modell werden, zusätzlich zum Pumpwerk mit dem Kanalnetz, Regenüberläufe (RÜ), Regenüberlaufbecken (RÜB) und Stauraumkanäle (SRK) erfasst, die für Entlastung bzw. Zwischenspeicherung des Mischwassers bei Kapazitätsengpässen sorgen. Regenüberläufe setzen an den Mischwasserkanälen an und entlasten in die umliegenden Gewässer oder dienen als interne Regenüberläufe zur Kopplung von Kanalnetz und Stauraumkanal. Die Regenüberlaufbecken werden über Pumpen, Schwellen oder Heber vom Kanalnetz aus beschickt und haben, genau wie die Stauraumkanäle, einen Klärüberlauf (KÜ) zur Notentwässerung.

Einige Kanalnetze bestehen aus gekoppelten Teilnetzen, wobei die Kopplung über Drosseln (Rohrdrosseln, Drosselorgane) erfolgt. Im Normalfall durchströmt Mischwasser die Drossel vom höher- zum tiefergelegenen Teilnetz, in der Menge begrenzt auf die Drosselleistung. Bei Einstau des tiefer gelegenen Teilnetzes bis hin zu der Ordinate, auf der die Drossel angeordnet ist, können die Teilnetze jedoch einen kombinierten Speicher bilden. Eine rückwärtige Durchströmung der Drossel ist dann möglich.

In Tabelle 5.1 erfolgt eine systematische Auflistung der 46 modellierten Einzugsgebiete mit ihren Pumpwerken. Es treten folgende in Bezug zur Realität vereinfachte Ausprägungen der Kanalnetze auf (K-Typ):

- Trennkanalisation mit Notauslass (T)
- Trennkanalisation ohne Notauslass (ToN)
- einfache Mischkanalisation (M)
- Mischkanalisation mit Regenüberlaufbecken (MR)
- Mischkanalisation mit Stauraumkanal (MS)
- Mischkanalisation mit Regenüberlaufbecken und Stauraumkanal (MRS)

Die dem Mischsystem zugehörigen Einzugsgebiete werden im Folgenden genauer beschrieben. Hierbei handelt es sich um eine abstrakte, an die Modellierungsweise angepasste Beschreibung der Teilsysteme:

- Bln 1 (ähnlich: Bln 7, Bln 8)  
Die Beschickung des Regenüberlaufbeckens mittels Pumpe erfolgt ab einem vorgegebenen Wasserpegel im Kanalnetz (31.80 müNN). Die Pumpe fördert solange Mischwasser, bis eine gewisse Höhe (31.30 müNN) im Kanalnetz wieder unterschritten wird. Sollte die Wasserzufuhr andauern und somit die Kapazität des Regenüberlaufbeckens erschöpfen, wird das Mischwasser über den Klärüberlauf (35.95 müNN) an die anliegenden Gewässer abgegeben. Genauso im Kanalnetz: steigt trotz Pumpaktivität der Wasserstand, so wird bei Erreichen der Regenüberläufe (ab 32.60 müNN) über diese entlastet.
- Bln 2  
Das Einzugsgebiet Bln 2 besteht aus den zwei Teilkanalnetzen Nord und Süd mit gemeinsamem

Tabelle 1: Pumpwerke

Pumpwerk	Kläranlage	Teilnetze	K-Typ	Beschickung RÜB	# RÜ	Besonderheiten
Adh	WAS		T			
Bie 1	WAS		T			
Bln 1	RUH		MR	1 Pumpe	27	
Bln 2	RUH	Nord	MR	3+6 Heber	16	Schieber
		Süd	MR	12 Heber	23	Schieber
Bln 3	WAS	Bln 3 SRK	MS M		39+3 1	RÜ → SRK Bln 3
Bln 4	SCH		MR	1 Schwelle	96	ohne KÜ
Bln 5	SCH	Bln 5 SRK	MS M		3+4 1	RÜ → SRK Bln 5 ← RÜ Bln 12 ohD
Bln 7	RUH		MR	1 Pumpe	21	
Bln 8	RUH		MR	1 Pumpe	19	
Bln 9	SCH		MR	1 Schwelle	4	
Bln 10	RUH	Bln 10 SRK	MRS M	1 Pumpe	1+2 1	RÜ → SRK Bln 10
Bln 11	SCH	Bln 11 ohD	M M		2 2	← Drossel Bln 11 ohD Drossel → Bln 11
Bln 12	SCH	Bln 12 ohD	M MS		6 1+2	← Drossel Bln 12 ohD RÜ → SRK Bln 5, Drossel → Bln 12
Bri	WAS		T			
Buh	SCH		T			
Chb 1	RUH	Chb 1 WE Nord WE Süd	MR M M	3 Pumpen (3 RÜB)	54 3 1	← Drossel WE Nord und WE Süd Drossel → Chb 1, RÜ → Chb3 Drossel → Chb 1, RÜ → Chb3
Chb 3	RUH		M		21	← RÜ WE Nord und WE Süd
Grü	WAS		T			
Hdf	SCH		T			
Hlg	RUH		T			
Joh	WAS		T			
Kar	SCH		T			
Kht 1	WAS		T			
Lbg	WAS		T			
Lrd	WAS		T			
Mal	SCH		T			
Mar 1	SCH		T			
Mar 2	WAS		T			
Mdf	WAS		T			
Mfd 1	WAS		T			
Nkn 1	WAS	Nkn 1 SRK	MRS M	3+6 Heber	22+2 1	RÜ → SRK Nkn 1
Nkn 2	WAS	Nkn 2 ohD	ToN M			↔ Drossel Nkn 2 ohD Drossel ↔ Nkn 2
Nsch	SCH		T			
Owd	WAS		T			
Ros	SCH		T			
Rud	WAS		T			
RUH	RUH		M		2	
Spa 1	RUH		M		20	
Spa 2	RUH		T			
Stg	WAS		T			
Tgl	RUH		T			
Thf	WAS		T			
Trp	WAS		T			
Waid	RUH, SCH		T			
Wil	RUH	Wil Schb SRK	M MRS MR	1 Schwelle 2 Pumpen (2 RÜB)	12 1+5 1	↔ Drossel Schb RÜ → Wil, RÜ → SRK Schb, Drossel ↔ Wil
Wit	RUH		T			

Pumpwerk. Dies hat zur Folge, dass, insbesondere aufgrund der höheren Lage von Bln 2 Nord, zwischen beiden Netzen eine hydraulische Wechselwirkung besteht. Die Netze haben jeweils ein Regenüberlaufbecken, welches tiefer gelegen ist als die Kanalnetze und somit mittels Heber beschickt werden kann. Dabei hat Bln 2 Nord zwei verschiedene Hebergruppen mit 3 bzw. 6 Hebern und Bln 2 Süd eine Hebergruppe mit 12 Hebern. Außerdem befindet sich zwischen Kanalnetz und Regenüberlaufbecken jeweils ein Schieber, der entweder vollständig geöffnet oder vollständig geschlossen sein kann. Der Einsatz des Schiebers verzögert die Entlastung über Klär- und Regenüberlauf. Aktuell wird er nach festen Regeln abhängig vom Wasserstand im Kanalnetz gesteuert.

- Bln 3

Von den 42 Regenüberläufen im Gebiet Bln 3 führen drei in den Stauraumkanal. Ist dieser vollständig gefüllt, wird er über seinen Klärüberlauf entlastet. Mischwasser wird bei 32.40 müNN über den Regenüberlauf in Gewässer abgeleitet, bevor bei 32.50 müNN der Regenüberlauf zum Stauraumkanal einsetzt. Dies geschieht also nur dann, wenn RÜ 65 und RÜ 64N den starken Regenfluss nicht ausreichend abtransportieren.

- Bln 4

Das Einzugsgebiet Bln 4 besitzt ein Regenüberlaufbecken ohne Klärüberlauf, welches daher auch als Fangbecken bezeichnet wird. Dieses wird über eine Schwelle vom Kanalnetz aus beschickt. Somit ergibt sich folgender Ablauf bei starkem Regen: zunächst füllt sich das Kanalnetz von Bln 4. Dann wird bei Erreichen der Schwellenhöhe (31.20 müNN) das Fangbecken beschickt. Da es hier keinen Klärüberlauf gibt, bilden bei Kapazitätsauslastung des Beckens und anhaltendem Regenwasserzufluss, das Kanalnetz und das Fangbecken einen kombinierten Speicher. Eine Entlastung erfolgt schließlich bei weiter steigendem Wasserpegel über die Regenüberläufe (ab 31.75 müNN) des Kanalnetzes.

- Bln5 und Bln 12

Ähnlich wie Bln 3 hat Bln 5 einen Stauraumkanal, der hier über vier interne Regenüberläufe beschickt wird. Zusätzlich wird dem Stauraumkanal aber Mischwasser aus Bln 12 oberhalb Drossel zugeführt. Zum Pumpwerk Bln 12 gehören die Teilnetze Bln 12 und Bln 12 oberhalb Drossel, wobei beim letzteren zwei der drei Regenüberläufe zum Stauraumkanal Bln 5 führen. Diese beiden internen Regenüberläufe liegen tiefer (33.70 müNN) als der Regenüberlauf zum Gewässer (33.80 müNN), werden also zuerst genutzt. Bln 12 oberhalb Drossel ist über eine variable Drossel direkt mit Netz Bln 12 verbunden. Hier befindet sich dann auch das Pumpwerk, so dass normalerweise das gesamte Mischwasser aus Bln 12 oberhalb Drossel nach Bln 12 fließt. Nur bei starken Niederschlägen erfolgt die Entlastung auch in den Stauraumkanal Bln 5 und notfalls in die Gewässer.

- Bln 10

Bei starkem Regenwasserzufluss und damit steigendem Wasserstand fließt zunächst Mischwasser über einen kleinen internen Regenüberlauf (38.30 müNN) in den Stauraumkanal. Später setzt die Pumpe ein (38.55 müNN, aus bei 38.40 müNN) und beschickt das Regenüberlaufbecken. Steigt trotz dieser Entlastungen der Pegel weiter, gibt es einen zweiten größeren internen Regenüberlauf (38.75 müNN) zum Stauraumkanal, der dann zum Einsatz kommt. Sind die Speicher voll, wird schließlich das bereits stark verdünnte Mischwasser über den Klärüberlauf (38.75 müNN) des Stauraumkanals bzw. über den Regenüberlauf des Kanalnetzes an die Gewässer abgegeben. Das über die Pumpen beschickte Regenüberlaufbecken kann ebenfalls über einen Klärüberlauf entlastet werden.

- Chb 1 und Chb 3  
Zum Pumpwerk Chb 1 gehören die Teilkanalnetze Chb 1, Westend Nord und Westend Süd. Das Pumpwerk befindet sich im Teilsystem Chb 1, welches über drei Regenüberlaufbecken mit jeweils einer Pumpe zur Beschickung verfügt. Die beiden Netze Westend Nord und Westend Süd befinden sich oberhalb der zugehörigen Drosseln, deren Durchfluss im Modell auf einen konstanten Wert begrenzt ist. Die Regenüberläufe der beiden oberen Netze führen direkt zum Kanalnetz von Chb 3. Bei großen Niederschlagsmengen erfolgt also zuerst die Entlastung bei Chb 1 hin zu den drei Regenüberlaufbecken, während ständig ein Zufluss aus den beiden Kanalnetzen oberhalb der Drosseln erfolgt. Sollte die hydraulische Kapazität der Drosseln überschritten sein, und sich dadurch der Abfluss von Westend Nord und Westen Süd verzögern, so sorgen schließlich die Regenüberläufe ins Netz Chb 3 für Entlastung.
- Nkn 1  
Das Regenüberlaufbecken des Kanalnetzes Nkn 1 wird über zwei Hebergruppen mit drei bzw. sechs Hebern beschickt. Dann entwässern zwei Regenüberläufe zum Stauraumkanal hin. Diese liegen ein wenig höher als der erste Regenüberlauf zum Gewässer.
- Nkn 2  
Das Teilnetz Nkn 2 oberhalb Drossel ist über eine Drossel, deren Durchfluss im Modell auf einen konstanten Wert begrenzt ist, an das Kanalnetz von Nkn 2 angeschlossen, entwässert also dorthin. Das Besondere an diesem Einzugsgebiet ist, dass Nkn 2 dem Trennverfahren angehört, jedoch keinen Notauslass besitzt. Sollte hier die Förderkapazität des Pumpwerks Nkn 2 überschritten sein, erfolgt bei überlastetem Kanalnetz Nkn 2 die Entlastung rückwärts durch die Drossel nach Nkn 2 oberhalb Drossel, die beiden Teilnetze bilden dann also einen kombinierten Speicher.
- Wil  
Dieses Einzugsgebiet besteht aus den Teilnetzen Wil und Schb, die über eine Drossel gekoppelt sind, wobei Schb sich oberhalb der Drossel befindet. Im Modell ist die Drossel im Durchfluss auf einen konstanten Wert begrenzt. Das Pumpwerk befindet sich im Einzugsgebiet Wil, so dass die hauptsächliche Entwässerung von Schb über die Drossel nach Wil erfolgt. Sollte die Drosselkapazität nicht zu einem ausreichenden Abfluss im Netz Schb führen, so folgt bei erhöhtem Wasserpegel (32.50 müNN) die Beschickung des Regenüberlaufbeckens über eine Schwelle und später (ab 33.00 müNN) die Entlastung über fünf interne Regenüberläufe zum Stauraumkanal hin. Letzte Möglichkeit ist schließlich ein interner Regenüberlauf (35.80 müNN) zum Kanalnetz Wil. Von Schb wird also kein Mischwasser direkt an umliegende Gewässer abgegeben. Der Stauraumkanal von Schb beschickt über jeweils eine Pumpe seine zwei Regenüberlaufbecken, welche über Klärüberläufe entlastet werden. Ebenso kann bei Kapazitätsüberschreitung der Stauraumkanal und das Regenüberlaufbecken von Schb über Klärüberläufe entwässert werden. Aufgrund des Zuflusses aus Schb und der begrenzten Förderleistung des Pumpwerkes erfolgt im Teilnetz Wil die Entlastung bei zu hohem Wasserstand über die Regenüberläufe (ab 32.59 müNN) an die Gewässer.

## 5.2 Abwasserdruckleitungsnetz

Das Abwasserdruckleitungsnetz verbindet die Pumpwerke (Endpunkte der Einzugsgebiete) mit den Kläranlagen. Die meisten Pumpwerke können Abwasser zu verschiedenen Kläranlagen fördern; zusätzlich existieren innerhalb des ADL-Netzes an verschiedenen Schieberkreuzen weitere Möglichkeiten zur Verteilung der Abwasserströme. Das modellierte ADL-Netz besteht aus folgenden Elementen:

- 1442 Knoten  
Netzverzweigungen einschließlich Quellen (Ausgänge der Pumpwerke; Eingänge gehören zum Kanalnetz) und Senken (Eingänge der Kläranlagen). Daten: geographische Koordinaten.
- 910 Rohrleitungen  
Rohrverbindungen zwischen zwei Knoten. Daten: Länge, Durchmesser und Rauigkeit sowie Koeffizient für örtliche Energieverluste.
- 775 Schieber  
Steuerelemente zwischen zwei Knoten, die eine kontinuierliche Verringerung des Durchflussquerschnitts bis zur vollständigen Absperrung ermöglichen. Daten: Durchmesser und Status. Schieber mit Status *open* sind zur Optimierung freigegeben; Schieber mit Status *closed* bleiben stets geschlossen, es sei denn, es handelt sich um dezidierte Regelschieber. Die Auswahl der potentiellen Regelschieber erfolgte in Absprache mit den Berliner Wasserbetrieben (Organisationseinheit AE).
- 46 Pumpwerke (siehe Abschnitt 5.1 und Tabelle 5.1)  
Steuerelemente, die durch Druckerhöhung das Abwasser aus den Kanalnetzen durch das ADL-Netz zu den Klärwerken fördern. Das physikalische Verhalten der Pumpen ist nicht modelliert. Die Fördermenge (Volumenstrom) ist nur durch den maximal erlaubten Druck im ADL-Netz beschränkt (5 bar). Mittels Optimierung soll herausgefunden werden, ob es ggf. sinnvoll ist, die Förderleistung von Pumpwerken zu verstärken. Daten: keine.

### 5.3 Kläranlagen

Die Kläranlagen reinigen das Abwasser. Für ihr dynamisches Verhalten existieren zwar detaillierte biochemische Modelle (DAE-Systeme der Dimension  $\approx 100$ ); im Optimierungskontext sollen diese aber zur Vereinfachung durch Kapazitätskennlinien ersetzt werden. Diese sind gegeben durch folgende Daten: Obergrenzen für nominale Zuflussrate (Dauerlast), maximale Zuflussrate (Spitzenlast), maximale Dauer der Spitzenbelastung, sowie maximalen Anstieg der Zuflussrate.

## 6 Mathematische Modellierung

Die integrierte Steuerung der Abwasserströme führt hier zu dynamischen Optimierungsmodellen mit nichtlinearen Restriktionen. Die Systemdynamik für eine gegebene Planungsperiode wird dabei durch ein geeignetes Zeitgitter erfasst. Zu jedem Intervall des Zeitgitters gehört eine Kopie des gesamten räumlichen Netzwerkmodells mit eigenen Optimierungsvariablen. Das ADL-Netz als Kernbestandteil ist in der Zeit vollständig entkoppelt, da es keine Speicherelemente enthält. Die zeitliche Kopplung im Modell ist gegeben durch die Randbedingungen an den Zuflüssen aus den Kanalnetzen sowie an den Abflüssen in die Klärwerke.

Strukturell sind die entstehenden Modelle daher ähnlich zu den Optimierungsmodellen in der Betriebsplanung der Trinkwasserverteilung über Rohrnetze [4, 2, 7]: die Optimierung erfolgt über einen gegebenen Planungszeitraum; zu steuern ist ein komplexes Druckleitungsnetz mittels Pumpwerken und Schiebern. Der entscheidende Unterschied besteht darin, dass das zeitdiskrete Modell ganzzahlige Variablen zur Modellierung zustandsabhängiger Unstetigkeiten erfordert. Wir erhalten somit ein äußerst schwieriges gemischt-ganzzahliges nichtlineares Optimierungsproblem; hierauf gehen wir noch genauer ein (Abschnitt 7). Weiter bestehen deutliche Unterschiede hinsichtlich:

- Zielfunktion (minimale Versorgungskosten vs. minimaler Schmutzwasseraustritt);

- Randbedingungen an Zuflussknoten (Oberflächen- bzw. Grundwasserreservoirs vs. Kanalnetze) und Abflussknoten (Bedarfsprognose für Verbraucher vs. Kapazitätsschranken der Klärwerke);
- Verteilung und Typ der Pumpwerke (Wasserwerke an Reservoirs sowie Zwischen- und Überpumpwerke im Netz vs. Abwasserpumpwerke an Kanalnetzen), der Behälter (Tanks in Wasser- und Überpumpwerken vs. Kanalnetze) und der Abflussknoten (Verbraucher im gesamten Netz vs. Klärwerke am Rand);
- Modellierung der Pumpwerke (physikalisches Modell mit Wirkungsgrad, Stromverbrauch und Beschränkungen vs. unbeschränkte Fördermenge);
- Netztopologie und Flussrichtung (eng vermaschtes Verteilnetz mit unbekannter Flussrichtung in den meisten Kanten vs. wenig vermaschtes Netz mit fester Flussrichtung in vielen Kanten);
- Anzahl der Steuerelemente (je knapp 30 Pumpwerke und Schieber vs. 60 Pumpwerke und ca. 50 Schieber);
- Zeithorizont und Gitter (Tag im Stundenraster vs. einige Stunden im 5-Minutenraster).

## 6.1 Modellierung des gesamten Abwassersystems

Wir modellieren das Gesamtsystem als Graph (Netzwerk) mit Knotenmenge  $\mathcal{N}$  und Kantenmenge  $\mathcal{A}$ ,

$$G = (\mathcal{N}, \mathcal{A}).$$

Die Kanten werden mit  $ij \in \mathcal{A}$  bezeichnet, wobei  $i, j \in \mathcal{N}$  Anfangs- und Endknoten der Kante sind. Der Fluss in Kante  $ij$  ist positiv, wenn er vom Knoten  $i$  zum Knoten  $j$  fließt, anderenfalls ist er negativ. Im ADL-Netz und in den Klärwerken ist der Fluss stets positiv, ebenso in einigen Kanten des Kanalnetzes, so z. B. in den Pumpen sowie in allen Kanten, die ins Gewässer führen.

Das Gesamtsystem besteht aus drei wesentlichen Subsystemen: dem Abwasserkanalnetz  $G^{\text{AKN}}$ , dem Abwasserdruckleitungsnetz (ADL-Netz)  $G^{\text{ADL}}$  und den Klärwerken  $G^{\text{KW}}$ ,

$$G = G^{\text{AKN}} \cup G^{\text{ADL}} \cup G^{\text{KW}}.$$

Alle Abwasserzuflüsse (Trocken- und Regenzuflüsse) erfolgen ins Kanalnetz. Die Abflüsse aller Klärwerke werden von einem fiktiven Knoten  $kw \in \mathcal{N}^{\text{KW}}$  aufgenommen; die – unerwünschten – Abflüsse vom Kanalnetz ins Gewässer werden von einem ebenfalls fiktiven Knoten  $gw \in \mathcal{N}^{\text{AKN}}$  aufgenommen.

### 6.1.1 Zeitdiskretisierung

Den Planungszeitraum zerlegen wir durch ein äquidistantes Zeitgitter  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$  in Perioden der physikalischen Länge  $\Delta t$ . Die Periode  $t \in \{1, \dots, T\}$  bezeichnet das Zeitintervall  $(t - 1, t)$ , sie beginnt also im Zeitpunkt  $t - 1$  und endet im Zeitpunkt  $t$ . Der Anfangswert des Systems in  $t = 0$  ist gegeben. Im konkreten Anwendungsfall wird der neunstündige Planungszeitraum von 12:00 Uhr bis 21:00 Uhr im 5-Minutenraster aufgeteilt, also in 108 Perioden der Länge  $\Delta t = 5$  min.

### 6.1.2 Dynamische Variablen

Die dynamischen Variablen im Abwassersystem sind Druckhöhen  $H_{jt}$  in allen Knoten  $j \in \mathcal{N}$  sowie Volumenströme  $Q_{ijt}$  in allen Kanten  $ij \in \mathcal{A}$ . Einigen Knoten- und Kantentypen sind weitere Variablen zugeordnet (so z. B. (Füll-) Volumina  $V_{jt}$  in den Becken). Die Druckhöhen werden in m gemessen, die Volumenströme in  $\text{m}^3/\text{s}$ .

Alle dynamischen Variablen haben untere und obere Schranken, die von der Zeit abhängen dürfen,  $H_{jt} \in [H_{jt}^-, H_{jt}^+]$  und  $Q_{ijt} \in [Q_{ijt}^-, Q_{ijt}^+]$ . Typischerweise sind die Schranken aber statisch, d. h. für den gesamten Planungszeitraum identisch; wir schreiben dann  $H_j^\pm$  und  $Q_{ij}^\pm$ . Falls keine „echten“ Werte durch die Aufgabenstellung gegeben sind, wählen wir willkürliche Schranken, so dass sich alle Variablen in physikalisch sinnvollen Bereichen bewegen.

## 6.2 Modellierung des Kanalnetzes

Das Kanalnetz  $G^{\text{AKN}}$  besteht aus verschiedenen Teilnetzen. Die Teilnetze sind in der Regel vollständig voneinander getrennt, in vielen Fällen aber durch Drosseln oder Überläufe miteinander verbunden (vgl. Anhang S). Jedes dieser Teilnetze wiederum besteht aus verschiedenen Becken (Misch- oder Trennwasserkanälen, Regenüberlaufbecken und Stauraumkanälen), sowie aus Verbindungen zwischen den Becken (Pumpen, Überläufe, Heber, Drosseln). Zusätzlich besitzt jedes Teilnetz über Notauslässe oder Klärüberläufe eine Verbindung zum Gewässer, sowie exogen gegebene Trockenzuflüsse (Abwasser aus Haushalten, Gewerbe und Industrie) und prognostizierte Regenzuflüsse.

### 6.2.1 Netzwerktopologie

Die Knotenmenge  $\mathcal{N}^{\text{AKN}}$  repräsentiert die Becken der Teilnetze und die Gewässer; letztere sind zu einem fiktiven Knoten zusammengefasst. Die Becken (Abwasserkanäle, Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle) sind im Sinne von [4] als *Tanks* modelliert,  $\mathcal{N}_{\text{tk}}^{\text{AKN}} = \mathcal{N}_{\text{ka}} \cup \mathcal{N}_{\text{rüb}} \cup \mathcal{N}_{\text{srk}}$ , das Gewässer als *Reservoir*,  $\mathcal{N}_{\text{rs}}^{\text{AKN}} = \mathcal{N}_{\text{gw}} = \{\text{gw}\}$ . Somit haben wir

$$\mathcal{N}^{\text{AKN}} = \mathcal{N}_{\text{tk}}^{\text{AKN}} \cup \mathcal{N}_{\text{rs}}^{\text{AKN}} = \mathcal{N}_{\text{ka}} \cup \mathcal{N}_{\text{rüb}} \cup \mathcal{N}_{\text{srk}} \cup \mathcal{N}_{\text{gw}}.$$

Die Kantenmenge  $\mathcal{A}^{\text{AKN}}$  repräsentiert die Überläufe, Heber, Drosseln, Pumpen und die Schieber zwischen den Becken im Kanalnetz:

$$\mathcal{A}^{\text{AKN}} = \mathcal{A}_{\text{ue}} \cup \mathcal{A}_{\text{he}} \cup \mathcal{A}_{\text{dr}} \cup \mathcal{A}_{\text{pp}} \cup \mathcal{A}_{\text{sch}}.$$

Diese Kantentypen besitzen kein Äquivalent im Trinkwassermodell, obwohl die Pumpen und Schieber im Kanalnetz Ähnlichkeiten zu denen in [4] aufweisen.

Wir unterscheiden Mischwasserkanäle und Trennwasserkanäle,  $\mathcal{N}_{\text{ka}} = \mathcal{N}_{\text{mwk}} \cup \mathcal{N}_{\text{twk}}$ , sowie feste und variable Drosseln,  $\mathcal{A}_{\text{dr}} = \mathcal{A}_{\text{vdr}} \cup \mathcal{A}_{\text{fdr}}$ .

### 6.2.2 Dynamische Variablen

Dynamische Variablen im Kanalsystem sind die Druckhöhen  $H_{jt}$  und Volumina  $V_{jt}$  in den Knoten sowie die Flüsse  $Q_{ijt}$  in den Kanten.

Die zusätzliche Variable  $V_{jt}$  beschreibt das Volumen im Becken  $j$  zum Zeitpunkt  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ . Es ist nach unten durch  $V_j^- = 0$  beschränkt und nach oben durch einen Wert  $V_j^+$ . Die Schranken sind also statisch.

Die Druckhöhe  $H_{jt}$  gibt den Füllstand des Beckens als geodätische Höhe in müNN an. Die Schranken  $H_j^\pm$  sind die Höhen des tiefsten Punktes im Becken sowie des höchsten Auslasses (Klärüberlauf). Zwischen der Druckhöhe und dem Füllvolumen eines Beckens besteht über die Speicherkennlinie ein funktionaler Zusammenhang,  $H_{jt} = \sigma_j(V_{jt})$ .

Die dynamische Variable  $Q_{ijt}$  beschreibt den Fluss über die Kante  $ij$  in Periode  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ . In der Regel ist der Fluss durch die Aufgabenstellung nicht direkt beschränkt, sondern nur indirekt über die Druckhöhen der inzidenten Knoten. In den Kanten mit fester (positiver) Flussrichtung gilt aber natürlich  $Q_{ij}^- = 0$ . Weiter gibt es Kanten mit oberen Schranken  $Q_{ij}^+$ .

### 6.2.3 Modellierung der Becken

Die Knoten  $\mathcal{N}^{\text{AKN}}$  im Kanalnetz werden als Behälter modelliert. Jedoch unterscheidet sich die Modellierung der einzelnen Becken entsprechend ihrer Komplexität. Die Mischwasserkanäle, Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle verfügen in der Regel über mehrere Zu- und Abflüsse mit unbestimmter Flussrichtung auf verschiedenen Höhen, worin der Fluss  $Q_{ijt}$  jeweils von den Druckhöhen  $H_{it}$  und  $H_{jt}$  abhängt. Im Gegensatz dazu verfügen die Schmutzwasserkanäle über genau zwei Abflüsse: einen Notauslass ins Gewässer und ein Pumpwerk ins ADL-Netz. Bei beiden Abflüssen ist die Flussrichtung eindeutig. Desweiteren verfügen die Schmutzwasserkanäle nur über den Trockenzufluss und sind damit weniger komplex als die anderen Becken. Als dritte Klasse von Behältern fassen wir das Gewässer auf, welches ein unbeschränktes Fassungsvermögen und keine Abflüsse besitzt. Der Zufluss ins Gewässer ist unabhängig von dessen Zustand; somit unterscheidet sich die Modellierung von allen anderen Becken.

Im Folgenden beschreiben wir die Modellierung der verschiedenen Knotentypen im Kanalsystem ausführlich und getrennt nach der oben eingeführten Einteilung in Klassen.

#### Gewässer

Das Gewässer  $\mathcal{N}_{\text{gw}} = \{\text{gw}\}$  wird als Reservoir modelliert (wie im Versorgungsnetzmodell [4]), also als Behälter mit unendlichem Fassungsvermögen. Das Volumen  $V_{\text{gw},t}$  ergibt sich aus der Summe des Volumens zum Zeitpunkt  $t - 1$  und dem Zufluss in Periode  $t$ ,

$$V_{\text{gw},t} = V_{\text{gw},t-1} + \sum_{(i,\text{gw}) \in \mathcal{A}} Q_{i,\text{gw},t} \Delta t.$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  setzen wir  $V_{\text{gw},0} = 0$ . Das Gewässer besitzt keinerlei Abflüsse. Somit spielt die Druckhöhe ausschließlich für die Zuflüsse ins Gewässer eine Rolle. Da aber ein Rückfluss vom Gewässer ins Kanalnetz ausgeschlossen ist, definieren wir willkürlich eine konstante Druckhöhe  $H_{\text{gw},t} = H_{\text{gw}}$ , wobei  $H_{\text{gw}} < H_j^-$  für alle  $j \in \mathcal{N}^{\text{AKN}}$ .

Der Wert  $V_{\text{gw},T}$  am Ende des Planungszeitraums entspricht dem Gesamtvolumen des Abwassers, welches in die Gewässer austritt. Dieser Wert ist also zu minimieren: er definiert die Zielfunktion des Optimierungsmodells.

#### Schmutzwasserkanäle

Die Schmutzwasserkanäle werden ebenfalls als Behälter modelliert. Das Volumen in einem Schmutzwasserkanal  $j \in \mathcal{N}_{\text{twk}}$  zum Zeitpunkt  $t$  ergibt aus der Summe des Volumens zum Zeitpunkt  $t - 1$  und dem Trockenzufluss  $Q_{jt}^{\text{Tr}}$  sowie dem Fremdwasserzufluss  $Q_{jt}^{\text{Fr}}$  in Periode  $t$  abzüglich der Abflüsse ins ADL-Netz über das zugehörige Pumpwerk sowie ins Gewässer über den Notauslass:

$$V_{jt} = V_{j,t-1} + Q_{jt}^{\text{Tr}} \Delta t + Q_{jt}^{\text{Fr}} \Delta t - \sum_{jk \in \mathcal{A}} Q_{jkt} \Delta t. \quad (1)$$

Der Notauslass ist auf einer bestimmten Höhe installiert und wir gehen im Modell davon aus, dass er sämtliches Abwasser oberhalb dieser Höhe ins Gewässer abführt. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich die Gleichung (1) noch vereinfachen:

$$V_{jt} = V_{j,t-1} + Q_{jt}^{\text{Tr}} \Delta t + Q_{jt}^{\text{Fr}} \Delta t - Q_{jkt}^{\text{pw}} \Delta t - Q_{j,\text{gw},t} \Delta t. \quad (2)$$

Hierbei ist  $Q_{jkt}^{\text{pw}}$  der Fluss durch das zugehörige Pumpwerk ins ADL-Netz, und  $Q_{j,\text{gw},t}\Delta t$  entspricht dem Volumen, das ins Gewässer abgeführt wird. Dieses geht in die Zielfunktion ein und wird daher minimiert, so dass  $Q_{j,\text{gw},t} = 0$  gilt, falls  $V_j < V_j^{\text{Not}}$ .

### Mischwasserkanäle, Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle

Komplexer ist die Modellierung der Mischwasserkanäle, Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle, da diese im Regelfall wesentlich mehr Zu- und Abflüsse besitzen, die auf verschiedenen Höhen aktiv sind und nicht das gesamte Abwasser abführen können. Das Volumen zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich analog zu den anderen Becken aus dem Volumen des vorherigen Zeitpunktes und der Summe der Zuflüsse in Periode  $t$  abzüglich der Summe der Abflüsse in dieser Periode. Für  $j \in \mathcal{N}_{\text{riib}} \cup \mathcal{N}_{\text{srk}}$  gilt somit

$$V_{jt} = V_{j,t-1} + \sum_{ij \in \mathcal{A}} Q_{ijt}\Delta t - \sum_{jk \in \mathcal{A}} Q_{jkt}\Delta t. \quad (3)$$

Bei den Mischwasserkanalsystemen  $j \in \mathcal{N}_{\text{mwk}}$  müssen zusätzlich noch der Trocken- und der Regen-zufluss  $Q_{jt}^{\text{Tr}}$  bzw.  $Q_{jt}^{\text{Re}}$  der Periode  $t$  hinzuaddiert werden, so dass sich folgende Gleichung ergibt:

$$V_{jt} = V_{j,t-1} + Q_{jt}^{\text{Tr}}\Delta t + Q_{jt}^{\text{Re}}\Delta t + \sum_{ij \in \mathcal{A}} Q_{ijt}\Delta t - \sum_{jk \in \mathcal{A}} Q_{jkt}\Delta t. \quad (4)$$

Zusätzlich hängt der Fluss über die Kanten in diesen Becken von der Druckhöhe  $H_{jt}$  ab, so dass wir hier den Zusammenhang zwischen Volumen  $V_{jt}$  und Druckhöhe  $H_{jt}$  explizit modellieren müssen. Dies wird mithilfe der Speicherkennlinien  $\sigma_j$  realisiert; siehe Abschnitt 6.2.5.

### 6.2.4 Pumpen, Überläufe, Heber, Drosseln und Schieber

In diesem Abschnitt wird die Modellierung der Kanten  $\mathcal{A}^{\text{AKN}}$  im Kanalnetz beschrieben. Die Kanten repräsentieren die Pumpen, Überläufe, Heber, Drosseln und Schieber zwischen den Becken im Kanalnetz:

$$\mathcal{A}^{\text{AKN}} = \mathcal{A}_{\text{ue}} \cup \mathcal{A}_{\text{hc}} \cup \mathcal{A}_{\text{dr}} \cup \mathcal{A}_{\text{pp}} \cup \mathcal{A}_{\text{sch}}.$$

#### Pumpen

Wir betrachten eine Kante  $ij \in \mathcal{A}_{\text{pp}}$ , die die beiden Becken  $i, j \in \mathcal{N}^{\text{AKN}}$  miteinander verbindet. Der Fluss  $Q_{ijt}$  durch eine Pumpe ist stets nichtnegativ,  $Q_{ij}^- = 0$ , und durch eine maximale Förderleistung  $Q_{ij}^+$  nach oben beschränkt.

In der Praxis werden die Pumpen mit fester Fördermenge betrieben und bei bestimmten Schwellenhöhen des Füllstands  $H_{jt}$  aktiviert bzw. deaktiviert. Im Modell sind die Pumpen dagegen als stufenlos regelbare Steuerelemente abgebildet, um das zusätzliche Optimierungspotential auszuloten.

#### Überläufe

Wir betrachten eine Kante  $ij \in \mathcal{A}_{\text{ue}}$ , die die beiden Becken  $i, j \in \mathcal{N}^{\text{AKN}}$  verbindet. Ein Überlauf wird als rechteckige Öffnung mit Höhe  $a_{ij}$  und Breite  $b_{ij}$  zwischen den beiden Becken  $i$  und  $j$  modelliert. Der Fluss  $Q_{ijt}$  über die Kante ist abhängig von den Druckhöhen  $H_{it}$  und  $H_{jt}$ .

Wir bezeichnen mit  $S_{ij}$  die Schwellenhöhe und mit  $K_{ij}$  die Kronenhöhe des Überlaufs  $ij \in \mathcal{A}_{\text{ue}}$ . Die physikalischen Formeln zur Berechnung des Flusses findet man z. B. in [1]. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1.  $H_{it}, H_{jt} \leq S_{ij}$ :

Die Druckhöhen beider Becken liegen unterhalb der Schwelle, so dass  $Q_{ijt} = 0$  gilt.

2.  $S_{ij} \leq H_{it} \leq K_{ij}$  und  $H_{jt} \leq S_{ij}$ :

Die Druckhöhe im Becken  $i$  liegt innerhalb der Öffnung, während die Druckhöhe im Becken  $j$  unterhalb der Schwelle liegt. Beim Abfluss von Becken  $i$  nach Becken  $j$  handelt es sich um einen so genannten vollkommenen Überfall, der mit der Formel von Poleni beschrieben wird:

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \mu b_{ij} \sqrt{2g} (H_{it} - S_{ij})^{3/2}.$$

Durch Zusammenfassen der Konstanten erhalten wir

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2}, \quad \gamma_{ij} := \mu b_{ij} \sqrt{2g}.$$

3.  $H_{it} \geq K_{ij}$  und  $H_{jt} \leq S_{ij}$ :

In diesem Fall ist die Öffnung im Becken  $i$  vollständig überströmt und die Druckhöhe im Becken  $j$  liegt unterhalb der Schwelle. Es handelt sich um einen vollkommenen Ausfluss. Der Ausfluss von Becken  $i$  nach Becken  $j$  wird dann durch die Formel von Torricelli beschrieben:

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \gamma_{ij} \left( (H_{it} - S_{ij})^{3/2} - (H_{it} - K_{ij})^{3/2} \right).$$

4.  $S_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it} \leq K_{ij}$ :

Hier handelt es sich um einen unvollkommenen Überfall. Nach [1] beschreibt die Formel

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \alpha(H_{it}, H_{jt}) \gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2}$$

den Fluss durch den Überlauf am besten. Der so genannte Abminderungskoeffizient  $\alpha(H_i, H_j) \leq 1$  ist aber abhängig von den Druckhöhen und der Wehrform und kann nur experimentell ermittelt werden. Für die Überläufe in unserem Kanalnetz liegen die erforderlichen Daten nicht als geschlossene Funktion vor. Daher vereinfachen wir im Modell diese Formel und beschreiben den Abfluss durch die Formel von Poleni wie unter Punkt 2. (Wir setzen somit  $\alpha \equiv 1$ .)

5.  $S_{ij} \leq H_{jt} \leq K_{ij} \leq H_{it}$ :

In diesem Fall ist die Öffnung im Becken  $i$  vollständig überströmt, während im Becken  $j$  das Wasser in der Öffnung steht. Es handelt sich hier um einen teilweise rückgestauten Ausfluss, und nach [1] setzt sich der Fluss  $Q_{ijt}$  aus vollständig überströmten Ausfluss und nicht überströmten Ausfluss zusammen. Wir vernachlässigen in unserem Modell den vollständig überströmten Anteil und modellieren diesen ebenfalls als nicht überströmten Ausfluss. Daher können wir den Abfluss vollständig mit der Formel von Torricelli beschreiben (vgl. Punkt 3).

6.  $K_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it}$ : Der vollständig überströmte Ausfluss wird durch die Formel

$$Q_{ijt} = \gamma_{ij} a_{ij} (H_{it} - H_{jt})^{1/2}$$

beschrieben.

Im Allgemeinen kann in den Überläufen die Flussrichtung wechseln, da sowohl  $H_{jt} < H_{it}$  als auch  $H_{it} < H_{jt}$  gelten kann. Somit müssen wir für jeden Überlauf sieben Fälle unterscheiden. Zusammengefasst ergibt sich folgende stückweise definierte Funktion für den Fluss durch die Überläufe in Periode  $t$ :

$$Q_{ijt} = \begin{cases} 0 & H_{it}, H_{jt} \leq S_{ij}, \\ +\frac{2}{3}\gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2} & H_{jt} \leq H_{it} \leq K_{ij}, \\ -\frac{2}{3}\gamma_{ij} (H_{jt} - S_{ij})^{3/2} & H_{it} \leq H_{jt} \leq K_{ij}, \\ +\frac{2}{3}\gamma_{ij} ((H_{it} - S_{ij})^{3/2} - (H_{it} - K_{ij})^{3/2}) & H_{jt} \leq K_{ij} \leq H_{it}, \\ -\frac{2}{3}\gamma_{ij} ((H_{jt} - S_{ij})^{3/2} - (H_{jt} - K_{ij})^{3/2}) & H_{it} \leq K_{ij} \leq H_{jt}, \\ +\gamma_{ij} a_{ij} (H_{it} - H_{jt})^{1/2} & K_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it}, \\ -\gamma_{ij} a_{ij} (H_{jt} - H_{it})^{1/2} & K_{ij} \leq H_{it} \leq H_{jt}. \end{cases}$$

Bei den Überläufen ins Gewässer ist die Flussrichtung eindeutig: es ist nur ein Fluss vom Becken in Richtung Gewässer möglich. Da das Gewässer als Reservoir modelliert ist, ist sein Volumen unabhängig von der Druckhöhe. Die Druckhöhe im Gewässer ist als Konstante modelliert und liegt unterhalb der kleinsten Druckhöhe aller Becken im Kanalnetz, so dass der Fall des vollständig überströmten Ausflusses nicht auftritt. Mit diesen Besonderheiten ergibt sich die Flussgleichung:

$$Q_{i,gw,t} = \begin{cases} 0 & H_{it}, H_{gw,t} \leq S_{i,gw}, \\ \frac{2}{3}\gamma_{i,gw} (H_{it} - S_{i,gw})^{3/2} & H_{gw,t} \leq H_{it} \leq K_{i,gw}, \\ \frac{2}{3}\gamma_{i,gw} ((H_{it} - S_{i,gw})^{3/2} - (H_{it} - K_{i,gw})^{3/2}) & H_{gw,t} \leq K_{i,gw} \leq H_{it}. \end{cases}$$

In beiden Fällen ist der Fluss durch die Überläufe abschnittsweise definiert. In den Übergängen zwischen den Definitionsabschnitten ist er nicht differenzierbar und zum Teil unstetig. Das führt dazu, dass eine Modellierung als glatte (zweimal stetig differenzierbare) Funktion inadäquat ist. Für eine korrekte Modellierung benötigen wir deshalb zusätzliche Binärvariablen (siehe auch Abschnitt 7.1).

**Modellierung mittels SOS 3-Beschränkungen.** Aus Gründen der Übersichtlichkeit lassen wir hier den Zeitindex  $t$  weg und beschränken uns auf die Betrachtung eines Zeitpunktes bzw. einer Periode.

Zur gemischt-ganzzahligen Modellierung abschnittsweise definierter (unstetiger) Funktionen wie der obigen Flussgleichungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine besonders elegante Variante, die zudem gewisse Vereinfachungen der Lösungsalgorithmen erlaubt, ist die Darstellung mit so genannten *special ordered sets* (SOS). In unserem Fall ist die Funktion  $Q_{ij}$  von zwei Variablen abhängig (den Druckhöhen  $H_i$  und  $H_j$ ); man nennt dies SOS vom Typ 3. Unser Ziel ist es, die stückweise definierte Funktion  $Q_{ij}$  als Summe der einzelnen Teilfunktionen darzustellen. Dies wird mit zusätzlichen Binärvariablen  $y_{ij}^s \in \{0, 1\}$  und kontinuierlichen Variablen  $\lambda_{ij}^{(u_i, u_j)} \in [0, 1]$  realisiert.

Zunächst führen wir für jeden Überlauf eine Triangulierung (Abbildung 1) des zulässigen Bereichs  $[H_i^-, H_i^+] \times [H_j^-, H_j^+]$  für  $(H_i, H_j)$  so durch, dass innerhalb jedes Dreiecks (Fachterminus: Simplex) der Fluss durch eine glatte Funktion dargestellt werden kann. Die Eckpunkte dieser Triangulierung bilden ein Gitter

$$\{(H_i^{u_i}, H_j^{u_j}) : (u_i, u_j) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j\}$$

mit

$$\mathcal{U}_i := \{H_i^-, S_{ij}, K_{ij}, H_i^+\}, \quad \mathcal{U}_j := \{H_j^-, S_{ij}, K_{ij}, H_j^+\}.$$

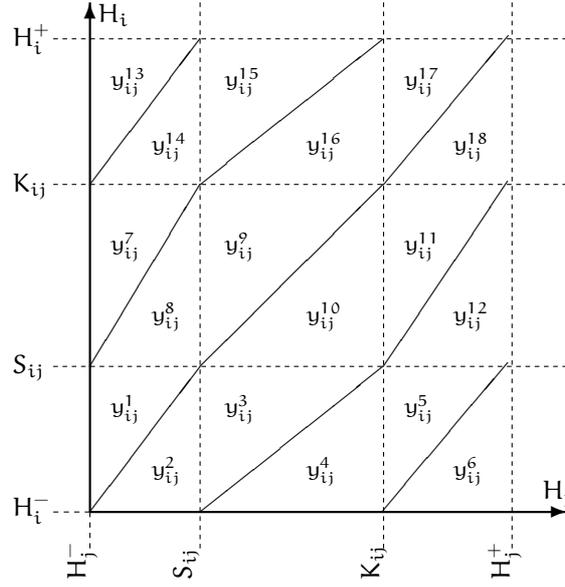


Abbildung 1: Beispiel für die Triangulierung eines Überlaufs

Die durch die Triangulierung entstehenden Dreiecke bezeichnen wir mit  $\Delta_{ij}^s$ ,  $s \in N_{ij} = \{1, \dots, n_{ij}\}$ . Jedes Dreieck wird durch 3 Gitterpunkte eindeutig charakterisiert. Zu jedem Dreieck  $\Delta_{ij}^s$  führen wir eine Binärvariable  $y_{ij}^s$  ein. Außerdem ordnen wir jedem Dreieck eine Gleichung für den Fluss  $Q_{ij}^s$  zu. Dabei entspricht  $Q_{ij}^s$  einer der Teilfunktionen der stückweise definierten Funktion  $Q_{ij}$ . Nun stellen wir  $(H_i, H_j)$  als Konvexkombinationen der Gitterpunkte dar:

$$(H_i, H_j) = \sum_{(u_i, u_j) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j} \lambda_{ij}^{(u_i, u_j)} (H_i^{u_i}, H_j^{u_j}), \quad (5)$$

$$\sum_{(u_i, u_j) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j} \lambda_{ij}^{(u_i, u_j)} = 1, \quad (6)$$

$$\lambda_{ij}^{(u_i, u_j)} \geq 0 \quad \forall (u_i, u_j) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j. \quad (7)$$

In der Konvexkombination sollen nur die Ecken genau eines Dreiecks  $\Delta_{ij}^s$  vorkommen, das  $(H_i, H_j)$  enthält und das wir *aktiv* nennen. Für alle anderen Ecken  $(u_i, u_j)$  verlangen wir also

$$\lambda_{ij}^{(u_i, u_j)} = 0.$$

Um dies zu garantieren, führen wir folgende Restriktionen ein:

$$\sum_{s \in N_{ij}} y_{ij}^s = 1, \quad (8)$$

$$\lambda_{ij}^{(u_i, u_j)} \leq \sum_{s \in \{r \in N_{ij} : (u_i, u_j) \in \Delta_{ij}^r\}} y_{ij}^s \quad \forall (u_i, u_j) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j, \quad (9)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in N_{ij}. \quad (10)$$

Mithilfe der Gleichungen (5) bis (10) ist jeder mögliche Punkt aus dem Bereich  $[H_i^-, H_i^+] \times [H_j^-, H_j^+]$  eindeutig bestimmt. Der Fluss durch den Überlauf von Becken  $i$  nach Becken  $j$  ergibt sich nun aus der Gleichung

$$Q_{ij} = \sum_{s \in N_{ij}} y_{ij}^s Q_{ij}^s.$$

Aufgrund der Modellierung des Flusses  $Q_{ij}$  durch die Überläufe mittels special ordered sets erhöht sich die Anzahl der Variablen im Modell erheblich. Für jeden Überlauf werden 16 Gitterpunkte und somit 16 Variablen  $\lambda_{ij}^s$  pro Zeitschritt erzeugt. Weiter entstehen pro Überlauf 20 Dreiecke und folglich 20 Binärvariablen  $y_{ij}^s$  pro Zeitschritt.

In unserem Modell können diese Zahlen reduziert werden, indem mehrere Dreiecke mit identischer Teilfunktion zusammengefasst werden. Zusätzlich reduziert sich die Anzahl der neu eingeführten Variablen auch dadurch, dass bei den Überläufen in die Gewässer der Fluss nichtnegativ ist und somit einige Unterscheidungen entfallen. Konkret beträgt die Anzahl der Gitterpunkte maximal 12 und die Anzahl der Dreiecke höchstens 10 pro Zeitschritt. Aufgrund der hohen Zahl der Überläufe und Zeitschritte führt dies trotzdem auf weit mehr als jeweils 100.000 kontinuierliche und binäre Variablen und eine entsprechende Anzahl zusätzlicher Restriktionen.

## Heber

Wir betrachten nun eine Kante  $ij \in \mathcal{A}_{he}$ , welche die beiden Becken  $i, j \in \mathcal{N}^{AKN}$  miteinander verbindet. Ein Heber wird ähnlich wie ein Überlauf als eine rechteckige Öffnung mit Höhe  $a_{ij}$  und Breite  $b_{ij}$  zwischen den Becken  $i$  und  $j$  modelliert. Zusätzlich ist an jeder Seite der Öffnung ein Rohr angebracht, das bis zur Höhe  $R_{ij}$  hinunterreicht und unter bestimmten Bedingungen eine Saugwirkung erzeugt. Analog zu den Überläufen ist der Fluss  $Q_{ijt}$  über die Kante abhängig von den Druckhöhen  $H_{jt}$  und  $H_{it}$ . Wir bezeichnen mit  $S_{ij}$  wieder die Schwellenhöhe des Überlaufs und mit  $K_{ij}$  seine Kronenhöhe. Die physikalischen Formeln zur Berechnung des Flusses findet man z. B. in [1]. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1.  $H_{it}, H_{jt} \leq S_{ij}$ :

Die Druckhöhen beider Becken liegen unterhalb der Schwelle, so dass  $Q_{ijt} = 0$  gilt.

2.  $S_{ij} \leq H_{it} \leq K_{ij}$  und  $H_{jt} \leq R_{ij}$ :

Die Druckhöhe im Becken  $i$  liegt innerhalb der Öffnung, während die Druckhöhe im Becken  $j$  unterhalb des Auslasses liegt. Wir nehmen an, dass in diesem Fall die Heberwirkung nicht einsetzt. Damit handelt es sich bei dem Abfluss von Becken  $i$  nach Becken  $j$  um einen vollkommenen Überfall, der mit der Formel von Poleni beschrieben wird:

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2}.$$

3.  $K_{ij} \leq H_{it}$  und  $H_{jt} \leq R_{ij}$ :

Die Druckhöhe im Becken  $i$  liegt oberhalb der Öffnung und wir gehen davon aus, dass nun die Heberwirkung einsetzt. Der Fluss von Becken  $i$  nach Becken  $j$  wird beschrieben durch:

$$Q_{ijt} = \gamma_{ij} a_{ij} (H_{it} - R_{ij})^{1/2}.$$

4.  $R_{ij} \leq H_{jt} \leq S_{ij} \leq H_{it} \leq K_{ij}$ :

Ebenso wie in 2 nehmen wir an, dass die Heberwirkung nicht einsetzt, so dass der Fluss von  $i$  nach  $j$  mit der Formel von Poleni berechnet werden kann:

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2}.$$

5.  $R_{ij} \leq H_{jt} \leq S_{ij} \leq K_{ij} \leq H_{it}$ :

Die Druckhöhe  $H_{it}$  liegt oberhalb der Krone, so dass sich der Heber vollständig füllt und die Heberwirkung einsetzt. Der Fluss von  $i$  nach  $j$  wird durch

$$Q_{ijt} = \gamma_{ij} a_{ij} (H_{it} - H_{jt})^{1/2}$$

beschrieben, da der Auslass des Hebers zum Teil gefüllt ist.

6.  $S_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it} \leq K_{ij}$ :

Der Heber hat in diesem Fall keine Wirkung, da das Unterwasser  $H_{jt}$  in der Öffnung steht. Es handelt sich hier also um einen unvollkommenen Überfall. Wie bei den Regenüberläufen vernachlässigen wir die Unvollkommenheit, und berechnen den Überfall nach der Formel des vollkommenen Überfalls:

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2}.$$

7.  $S_{ij} \leq H_{jt} \leq K_{ij} \leq H_{it}$ :

Hier handelt es sich um einen teilweise rückgestauten Ausfluss (wie schon bei den Überläufen), da das Unterwasser  $H_{jt}$  in der Öffnung steht. Wir vernachlässigen den Rückstau und berechnen den Fluss von Becken  $i$  nach Becken  $j$  nach der Formel von Torricelli:

$$Q_{ijt} = \frac{2}{3} \gamma_{ij} \left( (H_{it} - S_{ij})^{3/2} - (H_{it} - K_{ij})^{3/2} \right).$$

8.  $K_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it}$ :

In diesem Fall ist die Öffnung des Hebers vollständig überströmt und der Heber hat keine Auswirkung auf den Fluss von  $i$  nach  $j$ , so dass dieser analog zu den Überläufen berechnet wird:

$$Q_{ijt} = \gamma_{ij} a_{ij} (H_{it} - H_{jt})^{1/2}.$$

Bei den Hebern ist ein Fluss sowohl von Becken  $i$  nach Becken  $j$  als auch von  $j$  nach  $i$  möglich. Daher müssen wir bei den Hebern elf Fälle unterscheiden. Zusammengefasst ergibt sich folgende

stückweise definierte Funktion für den Fluss durch die Heber in Periode  $t$ :

$$Q_{ijt} = \begin{cases} 0 & H_{it}, H_{jt} \leq S_{ij}, \\ +\frac{2}{3}\gamma_{ij} (H_{it} - S_{ij})^{3/2} & H_{jt} \leq H_{it} \leq K_{ij}, \\ -\frac{2}{3}\gamma_{ij} (H_{jt} - S_{ij})^{3/2} & H_{it} \leq H_{jt} \leq K_{ij}, \\ +\gamma_{ij}a_{ij} (H_{it} - R_{ij})^{1/2} & H_{jt} \leq R_{ij} < K_{ij} \leq H_{it}, \\ -\gamma_{ij}a_{ij} (H_{jt} - R_{ij})^{1/2} & H_{it} \leq R_{ij} < K_{ij} \leq H_{jt}, \\ +\gamma_{ij}a_{ij} (H_{it} - H_{jt})^{1/2} & R_{ij} \leq H_{jt} \leq S_{ij} \leq K_{ij} \leq H_{it}, \\ -\gamma_{ij}a_{ij} (H_{jt} - H_{it})^{1/2} & R_{ij} \leq H_{it} \leq S_{ij} \leq K_{ij} \leq H_{jt}, \\ +\frac{2}{3}\gamma_{ij} ((H_{it} - S_{ij})^{3/2} - (H_{it} - K_{ij})^{3/2}) & S_{ij} \leq H_{jt} \leq K_{ij} \leq H_{it}, \\ -\frac{2}{3}\gamma_{ij} ((H_{jt} - S_{ij})^{3/2} - (H_{jt} - K_{ij})^{3/2}) & S_{ij} \leq H_{it} \leq K_{ij} \leq H_{jt}, \\ +\gamma_{ij}a_{ij} (H_{it} - H_{jt})^{1/2} & K_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it}, \\ -\gamma_{ij}a_{ij} (H_{jt} - H_{it})^{1/2} & K_{ij} \leq H_{it} \leq H_{jt}. \end{cases}$$

Wie bei den Überläufen wird der Fluss  $Q_{ij}$  durch die Heber mittels *special ordered sets* (SOS) modelliert. Wieder ist die Funktion  $Q_{ij}$  von den Druckhöhen  $H_i$  und  $H_j$  abhängig, so dass es sich auch hier um SOS vom Typ 3 handelt. Die Triangulierung und die Einführung neuer Variablen  $\lambda_{ij}^{(u_i, u_j)}$  und  $y_{ij}^s$  und neuer Restriktionen kann analog zu den Überläufen geschehen.

Da die Anzahl der Heber relativ gering ist und einzelne Heber (im Gegensatz zu den Überläufen) zu Hebergruppen zusammengefasst werden können, werden hier nur jeweils etwa 100 binäre und kontinuierliche Variablen zusätzlich pro Zeitschritt erzeugt, insgesamt also etwa 10.000.

## Drosseln

Wir betrachten eine Kante  $ij \in \mathcal{A}_{dr}$ , die die beiden Becken  $i, j \in \mathcal{N}$  miteinander verbindet. Wir nehmen an, dass Becken  $j$  tiefer liegt als Becken  $i$ , also  $H_j^- < H_i^-$ . Es ist zu unterscheiden zwischen festen und variablen Drosseln. Eine feste Drossel besitzt eine konstante obere Schranke  $Q_{ij}^+$  für den Fluss  $Q_{ij}$ , welche unabhängig von den Druckhöhen in den Becken ist. Durch die festen Drosseln ist außer dem Fluss von  $i$  nach  $j$  auch ein Fluss von  $j$  nach  $i$  möglich, wenn die Höhen der Becken dies zulassen. Der maximale Fluss von  $j$  nach  $i$  beträgt dann  $-Q_{ij}^+$ .

Der maximale Fluss durch die variablen Drosseln wird durch den aktuellen Fluss im zugehörigen Pumpwerk des Teilnetzes bestimmt. Diese Drosseln lassen keinen Fluss von  $j$  nach  $i$  zu.

Die Unterkante  $S_{ij}$  des Drosselrohrs entspricht der tiefsten Stelle des Beckens  $i$ , also  $S_{ij} = H_j^-$ . Zusätzlich nehmen wir aus Gründen der Konsistenz eine Oberkante  $K_{ij}$  an. Diese Höhe ist so gewählt, dass selbst bei maximalem Fluss durch die Drossel die Druckhöhe innerhalb einer Periode  $\Delta t$  nicht unter  $H_j^-$  sinken kann. Andernfalls könnten aufgrund der Zeitdiskretisierung innerhalb einer Periode unzulässige Zustände entstehen, in denen das Lösungsverfahren „steckenbleiben“ würde.

In den folgenden Abschnitten beschreiben wir die Modellierung der Kanten  $ij \in \mathcal{A}_{dr}$  getrennt nach festen und variablen Drosseln, wobei  $\mathcal{A}_{dr} = \mathcal{A}_{fdr} \cup \mathcal{A}_{vdr}$ .

**Feste Drosseln.** Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, in dem auch ein Fluss von Becken  $j$  nach Becken  $i$  möglich ist. Zur Modellierung einer festen Drossel müssen folgende Fälle unterschieden werden:

1.  $H_{jt} < S_{ij} \leq H_{it} < K_{ij}$ :

Die Druckhöhe des Beckens  $i$  liegt innerhalb des Drosselrohres und die Druckhöhe des Beckens  $j$  unterhalb. Der Abfluss von  $j$  nach  $i$  ergibt sich aus dem Zufluss zu Becken  $i$ , den wir mit  $Q_{it}^{\text{in}}$  bezeichnen. Dazu müssen zwei Fälle unterschieden werden.

(a)  $Q_{it}^{\text{in}} \leq Q_{ij}^+$ :

Der Abfluss wird nicht gedrosselt. Die Drossel kann den gesamten Zufluss zum Becken  $i$  ins Becken  $j$  abführen und die Druckhöhe  $H_{it}$  bleibt konstant. Der Fluss durch die Drossel beträgt

$$Q_{ijt} = Q_{it}^{\text{in}}.$$

(b)  $Q_{it}^{\text{in}} > Q_{ij}^+$ :

Da mehr in das Becken  $i$  zufließt, als durch die Drossel abgeführt werden kann, ist der Abfluss gedrosselt und  $H_{it}$  steigt. Der Fluss durch die Drossel beträgt

$$Q_{ijt} = Q_{ij}^+.$$

Der mögliche Übergang in den Zustand  $H_{it} < S_{ij}$  im aktuellen Zeitintervall wird nicht abgefangen, das Ergebnis kann also „darüber hinausschießen“. Für  $H_{it} > S_{ij}$  und  $Q_{it}^{\text{in}} < Q_{ij}^+$  gilt tatsächlich  $Q_{ijt} > Q_{it}^{\text{in}}$  und  $H_{it}$  sinkt (gegebenenfalls bis  $S_{ij}$ ). Dieser Sachverhalt wird im Modell ignoriert und verursacht ggf. Ungenauigkeiten, aber keine Unzulässigkeit und daher keine Inkonsistenz.

2.  $H_{jt} < S_{ij} < K_{ij} \leq H_{it}$ :

Die Druckhöhe des Beckens  $i$  liegt oberhalb des Drosselrohres und die Druckhöhe des Beckens  $j$  unterhalb, so dass ein Abfluss von  $i$  nach  $j$  erfolgt:

$$Q_{ijt} = Q_{ij}^+.$$

Der Abfluss ist unabhängig vom Zufluss  $Q_{it}^{\text{in}}$  gedrosselt. Durch die Wahl von  $K_{ij}$  ist gesichert, dass  $S_{ij} \leq H_{i,t+1}$ . Der mögliche Übergang zu  $H_{i,t+1} < S_{ij}$  wird nicht abgefangen, das Ergebnis kann also „darüber hinausschießen“. Um dies zu verhindern, müssen wir somit  $K_{ij} \geq S_{ij} + \sigma_i(Q_{ij}^+ \Delta t)$  wählen (Konsistenzbedingung an  $K_{ij}$ ).

3.  $S_{ij} \leq H_{it}, H_{jt} < K_{ij}$ :

Die Druckhöhen beider Becken  $i$  und  $j$  stehen innerhalb des Drosselrohres. Wir nehmen an, dass in diesem Fall der Fluss durch die Drossel gleich Null ist:

$$Q_{ijt} = 0.$$

Durch diese Art der Modellierung werden mögliche Fehler bei Übergängen um  $H_{it} \approx H_{jt}$  verhindert und entstehende Fehler sind aufgrund einer möglichst guten Wahl von  $K_{ij}$  vertretbar gering. Eine Modellierung, die einen Ausgleich der Druckhöhen zwischen den Becken  $i$  und  $j$  bewirkt, wäre genauer, aber schon zur Bestimmung der Flussrichtung müsste  $Q_{ijt}$  zumindest noch von den Zuflüssen in die Becken  $i$  und  $j$  abhängen und dies würde ein erheblich komplexeres Modell zur Folge haben (z. B. SOS vom Typ 5, also abhängig von vier Variablen).

4.  $S_{ij} \leq H_{jt} < K_{ij} \leq H_{it}$ :

Die Drossel ist aktiv, d. h.

$$Q_{ijt} = Q_{ij}^+.$$

Hier werden mögliche Übergänge zu  $H_i = H_j$  nicht abgefangen. Dies verursacht wieder Fehler, aber keine Inkonsistenzen. Ebenso könnte der Fall  $H_{i,t+1} < S_{ij}$  eintreten, sofern wir nicht wie zuvor  $K_{ij} \geq S_{ij} + \sigma_i(Q_{ij}^+ \Delta t)$  setzen.

5.  $S_{ij} \leq H_{it} < K_{ij} \leq H_{jt}$ :

Analog zu 4 ist die Drossel aktiv. Da die Druckhöhe in Becken j aber höher ist als die in Becken i, ist der Fluss negativ:

$$Q_{ijt} = -Q_{ij}^+.$$

6.  $K_{ij} \leq H_{jt} \leq H_{it}$ :

Analog zu 4 haben wir einen gedrosselten Fluss von i nach j:

$$Q_{ijt} = Q_{ij}^+.$$

7.  $K_{ij} \leq H_{it} < H_{jt}$ :

Dieser Fall verhält sich analog zu 5:

$$Q_{ijt} = -Q_{ij}^+.$$

Insgesamt ergibt sich eine stückweise definierte Funktion für den Fluss über die Kante  $ij \in \mathcal{A}_{\text{fdr}}$ , die in jeder Periode t von den Druckhöhen  $H_{it}$  und  $H_{jt}$  sowie vom Zufluss zum Becken i in dieser Periode abhängt. Würde man diese Funktion vollständig mittels *special ordered sets* modellieren, so wären diese also vom Typ 4. Stattdessen modellieren wir die Abhängigkeiten von  $H_{it}$  und  $H_{jt}$  als SOS vom Typ 3 und die Unterscheidung  $Q_{it}^{\text{in}}$  größer oder kleiner  $Q_{ij}^+$  mittels zweier Restriktionen und einer Binärvariablen pro Zeitschritt:

$$\begin{aligned} Q_{it}^{\text{in}} &\geq Q_{ij}^+ - Mz_{ijt} \\ Q_{it}^{\text{in}} &\leq Q_{ij}^+ + M(1 - z_{ijt}). \end{aligned}$$

Hierbei ist  $M > 0$  eine hinreichend große Konstante und  $z_{ijt} \in \{0, 1\}$ . Es gilt  $z_{ijt} = 0$ , falls  $Q_{it}^{\text{in}} \geq Q_{ij}^+$ , und  $z_{ijt} = 1$ , falls  $Q_{it}^{\text{in}} < Q_{ij}^+$ . Die Flussgleichung für die feste Drossel hat damit die Gestalt

$$Q_{ijt} = \sum_{s \in N_{ij}} y_{ij}^s Q_{ijt}^s,$$

wobei für den Fall 1 gilt:

$$Q_{ijt}^s = z_{ijt} Q_{it}^{\text{in}} + (1 - z_{ijt}) Q_{ij}^+.$$

**Variable Drosseln.** Die variablen Drosseln lassen ausschließlich einen Fluss von Becken i nach Becken j zu. Der maximale Fluss durch die Drossel ist proportional zum Fluss durch das Pumpwerk. Also gilt

$$Q_{ijt}^+ = \kappa_{ij} Q_{jkt},$$

wobei  $\kappa_{ij} \in (0, 1)$  ein fester Koeffizient ist und  $jk \in \mathcal{A}_{\text{pu}}^{\text{ADL}}$ . Zur Modellierung der variablen Drosseln werden folgende Fälle unterschieden:

1.  $H_{jt} < S_{ij} \leq H_{it} < K_{ij}$ :

Die Druckhöhe des Beckens i liegt innerhalb des Drosselrohres und die Druckhöhe des Beckens j unterhalb. Der Abfluss von j nach i ergibt sich aus dem Zufluss zu Becken i, den wir mit  $Q_{it}^{\text{in}}$  bezeichnen. Analog zu den festen Drosseln müssen zwei Fälle unterschieden werden.

(a)  $Q_{it}^{in} \leq Q_{ijt}^+$ :

Die Drossel kann den gesamten Zufluss zum Becken  $i$  ins Becken  $j$  abführen und die Druckhöhe  $H_{it}$  bleibt konstant. Der Fluss durch die Drossel beträgt

$$Q_{ijt} = Q_{it}^{in}.$$

(b)  $Q_{it}^{in} > Q_{ijt}^+$ :

Der Abfluss ist gedrosselt und  $H_i$  steigt. Der Fluss durch die Drossel beträgt

$$Q_{ijt} = Q_{ijt}^+.$$

Ebenso wie bei der Modellierung der festen Drosseln treten hier Ungenauigkeiten auf, aber keine Unzulässigkeit und daher keine Inkonsistenz.

2.  $H_{jt} < H_{it}$  und  $K_{ij} < H_{it}$ :

Die Druckhöhe des Beckens  $i$  liegt oberhalb des Drosselrohres und ist größer als die Druckhöhe des Beckens  $j$ , so dass ein Abfluss von  $i$  nach  $j$  vorliegt. Es gilt

$$Q_{ijt} = Q_{ijt}^+.$$

Der mögliche Übergang zu  $H_{i,t+1} < S_{ij}$  wird nicht abgefangen, das Ergebnis kann also „darüber hinausschießen“. Um dies zu verhindern, müssen wir  $K_{ij} \geq S_{ij} + \max_{t>0} \sigma_i(Q_{ijt}^+ \Delta t)$  setzen.

3.  $H_{it} < H_{jt}$ :

Bei den variablen Drosseln ist kein Fluss von Becken  $j$  nach  $i$  möglich, so dass

$$Q_{ijt} = 0.$$

Analog zu den festen Drosseln modellieren wir den Gesamtfluss durch eine variable Drossel mit SOS vom Typ 3 bezüglich der Druckhöhen der Becken  $i$  und  $j$  sowie einer zusätzlichen Binärvariablen für den Fall 1.

Im Berliner Abwasserkanalnetz gibt es fünf feste und zwei variable Drosseln, die mit 9 bzw. 7 Gitterpunkten und 8 bzw. 5 Dreiecken modelliert werden. Hinzu kommen die zusätzlichen oben beschriebenen Fallunterscheidungen, so dass pro Zeitschritt 15 neue Binärvariablen und 16 neue kontinuierliche Variablen in das Modell eingeführt werden und dessen Komplexität erhöhen.

### Schieber

Wir betrachten eine Kante  $ij \in \mathcal{A}_{sch}$ , die die beiden Becken  $i, j \in \mathcal{N}$  miteinander verbindet. Schieber werden mit einer (dynamischen) binären Steuervariable  $y_{ijt}$  modelliert, die den Fluss im Zeitschritt  $t$  blockiert ( $y_{ijt} = 0$ ) oder freigibt ( $y_{ijt} = 1$ ). Schieber treten immer zusammen mit anderen Kantentypen auf, so dass der Fluss zwischen zwei Becken durch die zweite Kante bestimmt (bzw. nach oben beschränkt) ist. In unserem Modell sind die Schieber im Gegensatz zur aktuellen Praxis frei steuerbar, so dass man wie bei den Pumpen das eventuelle Optimierungspotential ausloten kann.

### 6.2.5 Speicherkennlinien

Die Speicherkennlinien sind für jeden Speicher tabelliert als diskrete Datenpaare  $(V_k, H_k)$ , wobei die Füllvolumina  $V_k$  meist in regelmäßigen kleinen Abständen vorliegen (z. B.  $10 \text{ m}^3$ ). Hieraus sind glatte Darstellungen zu erzeugen (d. h. zweimal stetig differenzierbar), die einerseits in einem gewissen Bereich recht genau sein sollen (überall dort, wo der Speicher mit anderen Speichern gekoppelt ist), andererseits oft über den tabellierten Bereich hinaus extrapoliert werden müssen (um den – unerwünschten – Gewässerüberlauf zu erfassen). Für Füllvolumina zwischen Null und dem ersten Überlauf oder Zulauf ist dagegen die genaue Füllhöhe meist irrelevant. Zur Approximation benutzen wir deshalb kubische interpolierende Splines mit vorgeschriebener Steigung am linken und rechten Rand (sogenannte vollständige Splines), die ggf. nach links und/oder rechts linear extrapoliert werden. Die hierzu notwendige Ausdünnung der Daten sowie weitere technische Details sind für die vielen Speicher nicht einheitlich und oft manuell angepasst; weitere Informationen finden sich im Anhang S.

Die Approximation  $\tilde{\sigma}(V)$  einer Speicherkennlinie  $\sigma(V)$  lässt sich mathematisch im interpolierenden Bereich mittels B-Splines als stückweise kubische Funktion darstellen,

$$\tilde{\sigma}(V) = \sum_{k=-1}^{n+1} \tilde{H}_k B_k(V).$$

Hierzu wählt man ein äquidistantes Gitter

$$\tilde{V}_0, \dots, \tilde{V}_n, \quad \tilde{V}_k = \tilde{V}_0 + k\Delta\tilde{V}$$

mit zugehörigen Füllstandswerten  $\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n$ . Die Basisfunktionen  $B_k$  sind dann stückweise definiert als

$$B_k(V) = \begin{cases} \frac{1}{4}(|V - \tilde{V}_{k-2}|/\Delta\tilde{V})^3 & \text{für } V \in [\tilde{V}_{k-2}, \tilde{V}_{k-1}], \\ \frac{3}{4}(|V - \tilde{V}_k|/\Delta\tilde{V})^3 - \frac{3}{2}(|V - \tilde{V}_k|/\Delta\tilde{V})^2 + 1 & \text{für } V \in [\tilde{V}_{k-1}, \tilde{V}_{k+1}], \\ \frac{1}{4}(|V - \tilde{V}_{k+2}|/\Delta\tilde{V})^3 & \text{für } V \in [\tilde{V}_{k+1}, \tilde{V}_{k+2}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Wahl der Basisfunktionen hat den Vorteil, dass in der Summe  $\tilde{\sigma}(V)$  für jeden Wert  $V$  nur vier Summanden ungleich Null sind, so dass der Rechenaufwand unabhängig von der Gitterfeinheit ist.

Wie sich herausstellte, kann GAMS stückweise definierte Funktionen nicht direkt verarbeiten, so dass die Spline-Approximationen der Speicherkennlinien in C implementiert und als sogenannte *external functions* in GAMS eingebunden werden müssen. Dieses Feature wird erst in neueren GAMS-Versionen unterstützt. Sollte ein Verzicht auf external functions erforderlich sein, kommen alternativ Polynom-Approximationen der Speicherkennlinien in Betracht. Wir erwarten, dass damit ggf. nur schlechtere Approximationsgüten erreichbar sind; auf jeden Fall wäre aber mit vergleichsweise höherem Aufwand zu rechnen.

### 6.3 Abwasserdruckleitungsnetz

Das Abwasserdruckleitungsnetz weist von allen Teilsystemen des Abwassersystems die größten Gemeinsamkeiten mit einem Trinkwassernetz auf und wird demzufolge ähnlich wie in [4] modelliert. Alle Knoten des ADL-Netzes sind Anschlussknoten,  $\mathcal{N}^{\text{ADL}} \subseteq \mathcal{N}_{\text{jc}}$  (engl.: junctions); die Kanten sind entweder Rohrleitungen (engl.: pipes), Schieber (engl.: valves) oder Pumpen,

$$\mathcal{A}^{\text{ADL}} \subseteq \mathcal{A}_{\text{pi}} \cup \mathcal{A}_{\text{vl}} \cup \mathcal{A}_{\text{pu}}.$$

## Knoten

Gemäß [4] ist die Druckhöhe  $H_{jt}$  im Knoten  $j$  die Summe aus geodätischer Höhe und Höhenäquivalent des hydrodynamischen Drucks. Weiter gilt die Flussbilanz

$$\sum_{ij \in \mathcal{A}} Q_{ijt} - \sum_{jk \in \mathcal{A}} Q_{jkt} + Z_{jt} = 0,$$

wobei  $Z_{jt}$  den externen Zufluss zum Knoten  $j$  bezeichnet. (Für die meisten Knoten gilt  $Z_{jt} = 0$ .) Der Zufluss  $Q_{ijt}$  in einen Quellknoten  $j$  des ADL-Netzes ist die Förderung des zugehörigen Pumpwerkes  $ij$  aus dem Kanalnetz  $i \in \mathcal{N}^{\text{AKN}}$ ; der Abfluss  $Q_{jkt}$  aus einer Senke  $j$  des ADL-Netzes ist der Volumenstrom durch das zugehörige Klärwerk  $jk \in \mathcal{A}^{\text{KW}}$ .

## Rohrleitungen

In den Rohrleitungen des ADL-Netzes,  $ij \in \mathcal{A}_{pi}^{\text{ADL}}$ , erfüllen die Flussvariablen  $Q_{ijt}$  gemäß [4] die (approximierte) Druckverlustgleichung

$$H_{jt} - H_{it} = -\varphi_{ij}(Q_{ijt}).$$

Hierbei wird  $\varphi_{ij}$  nach der Darcy–Weisbach-Formel bestimmt, basierend auf einer glatten Approximation der Rohrreibungszahl nach Hagen–Poiseuille (laminar) und Prandtl–Colebrook (turbulent).

## Schieber

Bei den Schiebern des ADL-Netzes ergeben sich Vereinfachungen gegenüber der Modellierung in [4]. Die Schieber mit Status *closed* sind während des Planungszeitraums ständig geschlossen und treten nicht im Modell auf. Die Schieber mit Status *open* bilden die Kantenmenge  $\mathcal{A}_{vl}^{\text{ADL}}$ . Ihnen sind neben den Flüssen  $Q_{ijt} \in [Q_{ijt}^-, Q_{ijt}^+]$  auch Druckdifferenzen  $\Delta H_{ijt} \in [\Delta H_{ijt}^-, \Delta H_{ijt}^+]$  zugeordnet. Da die Flussrichtung im ADL-Netz nicht wechseln kann, ist die Konsistenzbedingung aus [4] unnötig; stattdessen gilt

$$Q_{ij}^- = 0, \quad \Delta H_{ij}^- = 0.$$

## Pumpen

Die Pumpen (Abwasserpumpwerke) bilden die Kantenmenge  $\mathcal{A}_{pu}^{\text{ADL}}$ . Ihnen sind ebenfalls Volumenströme  $Q_{ijt} \in [Q_{ijt}^-, Q_{ijt}^+]$  und Druckdifferenzen  $\Delta H_{ijt} \in [\Delta H_{ijt}^-, \Delta H_{ijt}^+]$  zugeordnet. Wieder ergeben sich Vereinfachungen gegenüber der Modellierung in [4]: für die Zwecke unserer Untersuchung unterliegen die Pumpen keinen direkten technischen Beschränkungen. Dies bedeutet insbesondere

$$Q_{ij}^- = 0, \quad Q_{ij}^+ = +\infty, \quad \Delta H_{ij}^- = -\infty, \quad \Delta H_{ij}^+ = +\infty.$$

Indirekte Beschränkungen für den Betrieb der Abwasserpumpwerke ergeben sich aber aus den Druckgrenzen im ADL-Netz sowie aus den Kapazitätsgrenzen der Klärwerke. Die Eingangsknoten der Pumpwerke sind die zugehörigen Kanalnetze; sie gehören also nicht zum ADL-Netz.

Zur beschriebenen Modellierung des ADL-Netzes gibt es für unsere Zwecke keine sinnvollen Alternativen. Eine gewisse Flexibilität im Detail besteht hinsichtlich der Wahl der Approximation  $\varphi_{ij}$  für den hydraulischen Druckverlust in den Rohren (in unserer Formulierung z. B. durch Wahl einiger Parameter [4]). Weiter können selbstverständlich direkte Beschränkungen für die Pumpwerke hinzugenommen werden.

## 6.4 Klärwerke

Das Subsystem der Klärwerke besteht aus der Kantenmenge  $\mathcal{A}^{\text{KW}}$  und Knotenmenge  $\mathcal{N}^{\text{KW}} = \{\text{kw}\}$ : jedes Klärwerk  $ij \in \mathcal{A}^{\text{KW}}$  verbindet eine Senke  $i$  des ADL-Netzes mit dem fiktiven Knoten  $j = \text{kw}$ , der als Reservoir [4] sämtliche Klärabflüsse aufnimmt. Das Klärwerk ist in unserem vereinfachten Modell durch folgende Kenndaten charakterisiert:

- Nominalzufluss  $Q_{ij}^{\text{nom}}$ :  
obere Grenze für den Abwasser-Volumenstrom, der im Dauerbetrieb verarbeitet werden kann;
- Maximalanstieg  $\dot{Q}_{ij}^{\text{max}}$ :  
obere Grenze für die zeitliche Ableitung des Abwasser-Volumenstroms;
- Maximalzufluss  $Q_{ij}^{\text{max}}$ :  
obere Grenze für den Abwasser-Volumenstrom, der kurzzeitig verarbeitet werden kann;
- Maximalzeit  $T_{ij}^{\text{max}}$ :  
obere Grenze für die Dauer, während der der Maximalzufluss verarbeitet werden kann.

Maximalzufluss  $Q_{ij}^{\text{max}}$  und Maximalzeit  $T_{ij}^{\text{max}}$  definieren eine obere Grenze für das Abwasservolumen, welches über die Nominalmenge hinaus verarbeitet werden kann: die Maximalmenge

$$V_{ij}^{\text{max}} = (Q_{ij}^{\text{max}} - Q_{ij}^{\text{nom}}) \left( T_{ij}^{\text{max}} - \frac{Q_{ij}^{\text{max}} - Q_{ij}^{\text{nom}}}{2\dot{Q}_{ij}^{\text{max}}} \right).$$

Dieses maximale Überschussvolumen ersetzt Maximalzufluss und Maximalzeit, wodurch unnötige Binärvariablen vermieden werden (Formulierung der Zeitbeschränkung).

Führen wir neben der Zuflussrate  $Q_{ijt} \in [0, Q_{ij}^{\text{max}}]$  den Überschussanteil  $Q_{ijt}^+ \in [0, Q_{ij}^{\text{max}} - Q_{ij}^{\text{nom}}]$  als dynamische Variable ein (Variablensplitting), so erhalten wir folgende Beschränkungen für jedes Klärwerk:

$$\begin{aligned} Q_{ijt} - Q_{ij,t-1} &\leq \Delta t \dot{Q}_{ij}^{\text{max}}, & Q_{ijt} - Q_{ijt}^+ &\leq Q_{ij}^{\text{nom}}, \\ Q_{ijt}^+ - Q_{ij,t-1}^+ &\leq \Delta t \dot{Q}_{ij}^{\text{max}}, & \sum_{t=1}^T Q_{ijt}^+ &\leq \frac{V_{ij}^{\text{max}}}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Auch für die Klärwerke haben wir keine alternative Modellierung vorgesehen. In Anbetracht der Komplexität des Gesamtmodells und der Ungenauigkeiten insbesondere im Teilmodell für die Kanalnetze wäre die Genauigkeit einer DAE-Modellierung der biochemischen Prozesse auf jeden Fall unnötig hoch. Falls es sich als erforderlich erweisen sollte, können weitere Beschränkungen jedoch leicht hinzugefügt werden.

## 7 Mathematische Lösungsansätze und Techniken

Wie bereits mehrfach erwähnt wurde, besteht die Hauptschwierigkeit des Abwassermodells in den zustandsabhängigen Unstetigkeiten, die durch die hydraulische Wechselwirkung benachbarter Kanalnetze, Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle über Schwellen, Drosseln und Heber verursacht werden. Diese Koppeffekte erfordern eine möglichst genaue Modellierung, da sie vor allem bei übermäßig starken Niederschlagsereignissen zum Tragen kommen. Gerade diese Situation soll ja mit dem Optimierungsmodell untersucht werden.

Da die existierenden nicht-glaten Optimierungsmethoden für Modelle unserer Größenordnung weder hinreichend effizient noch hinreichend zuverlässig sind, war es zunächst unser Ziel, durch geschickte Behandlung der zustandsabhängigen Unstetigkeiten eine nichtlineare Optimierungsaufgabe mit überall glatten (ein- oder zweimal differenzierbaren) Restriktionen zu formulieren. Zur Lösung solcher Modelle sind gradientenbasierte Optimierungsmethoden geeignet. Diese Methoden, wie z. B. Augmented-Lagrangian-Verfahren, SQP-Verfahren (*sequential quadratic programming*) oder Innere-Punkte-Verfahren, sind theoretisch sehr gut verstanden und es sind ausgereifte Codes verfügbar. Wir hatten geplant, analog zur Betriebsplanung im Trinkwassernetz [4, 2] unser Modell mit den unter GAMS verfügbaren Lösern MINOS, SNOPT und ggf. CONOPT zu bearbeiten, bzw. mit dem inzwischen neu hinzugekommenen Innere-Punkte-Code Ipopt. Mit diesen Verfahren wären keine grundsätzlichen Lösungsschwierigkeiten zu erwarten, sondern nur hohe Rechenzeiten und hoher Speicherbedarf aufgrund der Größe und Komplexität des Abwassersystems.

Aufgrund der komplexen Wirkungsweise der Drosseln und Heber war eine glatte Formulierung leider nicht möglich; allenfalls für die Schwellen hätte dies mittels Variablensplitting erreicht werden können. Wir gehen deshalb nochmals genauer auf die unstetigen Phänomene und die Modellierungsalternativen mit Vor- und Nachteilen ein.

## 7.1 Zustandsabhängige Unstetigkeiten

Das dynamische Verhalten des Abwassersystems in Raum und Zeit wird mathematisch exakt beschrieben durch eine *differentiell-algebraische Gleichung* (DAE, für engl. differential-algebraic equation), wobei der differentielle Anteil die zeitlichen Ableitungen der Behältervolumina wiedergibt (Zuflussraten); vgl. [4, 7]. In unserem zeitdiskreten Modell wird daraus eine Differenzengleichung, in der anstelle der Ableitungen die Änderungen der Behältervolumina über einen gesamten Zeitschritt auftreten (Gesamtzuflussmengen).

Bereits im zeitkontinuierlichen DAE-Modell der abstrakten Form

$$\begin{aligned} A(x(t), t) \dot{x}(t) &= f(x(t), z(t), u(t), t) \\ 0 &= g(x(t), z(t), u(t), t) \end{aligned}$$

treten Schwierigkeiten der Art auf, dass die rechten Seiten  $f, g$  (bzw. ihre partiellen Ableitungen erster und zweiten Ordnung) *unstetig* von den differentiellen Zustandsvariablen  $x$  und den algebraischen Zustandsvariablen  $z$  abhängen. Dagegen sind  $f, g$  bzgl. der Steuerungsvariablen  $u$  (Volumenströme oder Druckdifferenzen in Pumpwerken und Schiebern) zweimal stetig differenzierbar. Unstetigkeiten bzgl. der Zeitvariablen  $t$  können in allen Modellfunktionen  $A, f, g$  auftreten, sind aber unproblematisch, weil sie sich nur in *a priori* bekannten Zeitpunkten ereignen. Vom letzten Fall abgesehen setzen die favorisierten Algorithmen für nichtlineare Optimierungsprobleme voraus, dass  $A, f, g$  bzgl. *aller* Variablen zweimal stetig differenzierbar sind ( $C^2$ ).

Die in unserem Modell auftretenden Unstetigkeiten führen dazu, dass der Raum der Zustandsvariablen  $(x, z)$  in Teilgebiete zerlegt werden kann, in denen jeweils die  $C^2$ -Eigenschaft gilt. Man kann dies auch so auffassen, dass das DAE-Modell auf jedem Teilgebiet  $s \in S$  durch ein anderes Tripel Modellfunktionen gegeben ist:  $(A_s, f_s, g_s)$ . Zur Lösung solcher Modelle gibt es prinzipiell geeignete Optimierungstechniken, deren Einsatz auch für unser Modell wünschenswert wäre. Bei der numerischen Integration der DAE über den Planungshorizont führen diese Techniken eine *Schaltpunktsuche* durch, wobei die Übergänge des Zustands  $(x(t), z(t))$  zwischen den Teilgebieten zeitlich lokalisiert und korrekt durchgeführt werden. Für jeden möglichen Übergang  $s \rightarrow s'$  sind dazu ggf. *Sprungbedingungen* zu formulieren und im Algorithmus zu berücksichtigen. Unstetigkeiten bzgl. der Zeit werden hierbei als (explizit vorgegebene) Schaltpunkte berücksichtigt.

Das tatsächlich verwendete zeitdiskrete Modell entspricht dem zeitkontinuierlichen Modell mit vorab festgelegtem Integrationsverfahren (hier: explizites Euler-Verfahren) und vorab festgelegten Integrationsschrittweiten (gegeben durch das Zeitgitter). Die bereits angesprochenen Schwierigkeiten vererben sich somit auf das zeitdiskrete Modell; zusätzlich schränkt die vorgegebene Zeitdiskretisierung die Möglichkeiten einer adäquaten Behandlung ein. Insbesondere würde eine – prinzipiell denkbare – Schaltungssuche in jedem Diskretisierungsintervall nicht nur die konzeptionellen Vorteile der zeitdiskreten Formulierung weitgehend zunichte machen, sondern es würde ein Modell entstehen, das nicht mehr in einem Modellierungssystem wie GAMS implementiert werden kann.

Einschließlich bisher nicht diskutierter Techniken gibt es folgende Alternativen zur Behandlung der zustandsabhängigen Unstetigkeiten:

**Metaheuristiken.** Dies sind Optimierungsverfahren, die auf sehr allgemeinen Prinzipien beruhen, wie z. B. Simulated Annealing oder Genetische Algorithmen. Es werden praktisch keine strukturellen Voraussetzungen an das Modell benötigt; somit können aber auch keine Struktureigenschaften ausgenutzt werden. Diese Verfahren sind aus unserer Sicht nicht erfolgversprechend.

**Schaltpunktsuche.** Wie schon erörtert, ist dies die von uns favorisierte Methode, zumindest aus theoretischen Gesichtspunkten. Sie ist aber im Rahmen des Projekts völlig unpraktikabel, da eine Implementierung des Modells nicht in GAMS erfolgen kann und somit eine höhere Programmiersprache erforderlich ist. Weiter sind für Modelle unserer Größenordnung noch offene Forschungsfragen zu klären. Diesen Ansatz wollen wir im Rahmen einer Dissertation bearbeiten.

**MINLP.** Dies ist die Klasse nichtlinearer gemischt-ganzzahliger Optimierungsprobleme, in die unser aktuelles Modell einzuordnen ist. Sie verbindet eine saubere Modellierung mit der Möglichkeit, gradientenbasierte Algorithmen zu verwenden. Letztere sind dabei in Algorithmen zur Behandlung der ganzzahligen Variablen eingebunden (Branch-and-Bound). Solche Modelle lassen sich unmittelbar in GAMS und ähnlichen Systemen formulieren. Sie sind allerdings extrem schwierig zu lösen, obwohl die Algorithmenentwicklung in jüngerer Zeit sehr große Fortschritte zu verzeichnen hat. Unsere aktuelle MINLP-Formulierung ist daher hauptsächlich als Ausgangspunkt für weitere Studien geeignet.

**MIP.** Dies ist die Klasse *linearer* gemischt-ganzzahliger Optimierungsmodelle. Für unsere Zwecke stellt sie eine ernsthafte Alternative dar. Auch solche Modelle lassen sich unmittelbar in GAMS formulieren; sie sind sogar leichter lösbar und es existieren exzellente Codes. Allerdings sind *sämtliche* Nichtlinearitäten im Modell zu linearisieren, was im vorliegenden nichtkonvexen Fall auf eine große Zahl zusätzlicher SOS-Formulierungen führt. Im Projekt war es aus Zeitgründen nicht möglich, dieser Alternative nachzugehen. Wäre bereits zu Projektbeginn klar gewesen, dass wir ganzzahlige Variablen benötigen würden, so hätten wir diese Variante wohl favorisiert. Auch sie wollen wir in Zukunft gerne weiter verfolgen.

## 7.2 Variablensplitting

Die zustandsabhängigen Unstetigkeiten in unserem Modell lassen sich durch spezielle gemischt-ganzzahlige Formulierungen approximieren: sogenannte SOS 3-Teilmodellen, bei denen Rechtecke im  $\mathbf{R}^2$  in dreieckige Teilgebiete mit  $C^2$ -Eigenschaft zerlegt werden (siehe Abschnitt 7.1). In einfacheren Situationen kann man analog Intervalle in  $\mathbf{R}$  mittels SOS 2-Teilmodellen in Teilintervalle zerlegen, beispielsweise um Funktionen als Polygone zu approximieren.

In sehr speziellen Fällen bleiben bei solchen Zerlegungen gewisse *Konvexitätseigenschaften* erhalten; man kommt dann völlig ohne ganzzahlige Variablen aus. Der einfachste dieser Fälle ist das

aus der linearen Optimierung bekannte Variablensplitting. Wir erklären das Prinzip am Beispiel einer (allgemeinen) stückweise linearen Funktion mit zwei Abschnitten, die in  $(\bar{x}, \bar{y})$  verbunden sind:

$$c(x) = \begin{cases} \bar{y} + \alpha_-(\bar{x} - x), & x \leq \bar{x}, \\ \bar{y} + \alpha_+(x - \bar{x}), & x \geq \bar{x}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$x_+ := \max(x - \bar{x}, 0), \quad x_- := \max(\bar{x} - x, 0),$$

so lassen sich sowohl  $x$  wie auch  $c(x)$  als *lineare* Funktionen der neuen Variablen  $x_{\pm} \geq 0$  darstellen:

$$x = \bar{x} + x_+ - x_-, \quad c(x) = \bar{y} + \alpha_+x_+ - \alpha_-x_-.$$

Wesentlich hierfür ist die *Komplementarität* von  $x_{\pm}$ : nach Definition kann stets nur eine der Variablen ungleich Null sein, denn für  $x \leq \bar{x}$  ist  $x_+ = 0$  und  $x_- = \bar{x} - x$  und für  $x \geq \bar{x}$  ist  $x_+ = x - \bar{x}$  und  $x_- = 0$ . Die Komplementarität wird in den SOS-Formulierungen durch ganzzahlige Variablen mit entsprechenden Beschränkungen erzwungen; in den erwähnten speziellen Situationen hingegen ist sie aufgrund geeigneter Konvexitätseigenschaften „automatisch“ erfüllt.

In unserem Modell lassen sich die Überläufe alternativ mittels Variablensplitting modellieren, wobei eine allgemeinere Variante mit drei Abschnitten benötigt wird. Die erforderliche Konvexität ist dabei zunächst nicht gegeben, lässt sich aber vermutlich durch geeignete Strafkosten erzwingen, die ggf. durch numerische Experimente zu bestimmen wären. Da dieses Vorgehen jedoch nicht sicher zum Ziel führt und unser Modell ohnehin ganzzahlige Optimierungsvariablen benötigt, haben wir das zunächst vorgesehene Variablensplitting zugunsten der sauberen SOS-Modellierung aufgegeben.

## 8 Zusammenfassung

Die mathematische Optimierung des Berliner Abwassersystems führt auf ein sehr hochdimensionales und äußerst schwieriges nichtlineares gemischt-ganzzahliges Modell (MINLP, für engl. mixed-integer non-linear program). Es ist um Größenordnungen schwieriger als das ursprünglich angestrebte glatte nichtlineare Modell (NLP, engl. non-linear program). Verantwortlich hierfür sind im Wesentlichen die vielfältigen hydraulischen Wechselwirkungen der Teilnetze (Einzugsgebiete) des Abwasserkanalsystems, die über Schwellen, Heber und Drosseln auf komplexe Flussgleichungen mit vielen zustandsabhängigen Unstetigkeiten führen. Eine zuverlässige Modellierung dieser Komponenten bzw. Effekte erfordert die explizite Berücksichtigung der Unstetigkeiten, was innerhalb GAMS (oder vergleichbarer Modellierungssysteme) notwendig auf gemischt-ganzzahlige Formulierungen führt, also auf Modelle vom MINLP-Typ oder vom MIP-Typ. Dies schließt nicht völlig aus, dass nach ausgiebigen Untersuchungen und Vergleichen eventuell doch eine hinreichend genaue glatte Approximation vom NLP-Typ gefunden werden kann; aus jetziger Sicht erscheint dies jedoch sehr unwahrscheinlich.

Da der Fluss zwischen gekoppelten Teilnetzen von den Druckhöhen in *beiden* Teilnetzen abhängt, lassen sich in unserem MINLP-Modell Teilmodelle vom Typ SOS 3 nicht vermeiden. Derartige Teilmodelle sind bereits recht komplex und kommen bisher in Anwendungen selten vor. Nach unserer Kenntnis wurden sie erstmals in einem MIP-Modell zur Betriebsplanung in Gasnetzen eingesetzt. Gängig sind dagegen einfachere Teilmodelle vom Typ SOS 2; ausgereifte Lösungscode bieten hierfür sogar spezielle Unterstützung an.

Auch die Größe des Modells stellt eine Herausforderung dar: in der aktuellen Formulierung haben wir etwa 3 Millionen Optimierungsvariablen (davon gut 200.000 ganzzahlige) und etwa eine Million Beschränkungen (plus einfache Schranken). Somit ist unser Modell etwa um einen Faktor hundert

größer als bisher erfolgreich gelöste MINLP-Modelle. Wir haben versucht, das Abwassermodell mit dem MINLP-Löser Bonmin in Kombination mit dem NLP-Löser Ipopt in GAMS zu lösen, erwartungsgemäß allerdings bisher erfolglos.

Als Fazit bleibt festzuhalten, dass das Abwassermodell mit Standard-Optimierungstools derzeit nicht lösbar ist. Die angestrebten Untersuchungen erfordern zunächst weitere Forschungsarbeit, um das Modell einer numerischen Behandlung überhaupt zugänglich zu machen. Wir betrachten dies als eine wichtige und interessante Aufgabe, der wir uns nach Beendigung des aktuellen Projekts gerne weiter widmen wollen. Hierbei sollte außerdem eine weitergehende Vereinfachung der Beschreibung der Kanalnetze diskutiert werden.

## Literatur

- [1] G. BOLLRICH, *Technische Hydromechanik 1*, vol. 1, Huss-Medien GmbH, Berlin, Germany, sixth ed., 2007.
- [2] J. BURGSCHWEIGER, B. GNÄDIG, AND M. C. STEINBACH, *Nonlinear programming techniques for operative planning in large drinking water networks*, ZIB Report ZR-05-31, Zuse-Institut Berlin, 2005.
- [3] ———, *Optimierte Tagesplanung im Berliner Trinkwassernetz*, OR News, (2006), pp. 6–9.
- [4] ———, *Optimization models for operative planning in drinking water networks*, Optim. Eng., (2008). Online First.
- [5] B. GNÄDIG AND M. C. STEINBACH, *Betriebsoptimierung der Berliner Trinkwasserversorgung*. Zuse-Institut Berlin, 2003. Studie für ABB Utilities GmbH, Mannheim.
- [6] ———, *Betriebsoptimierung der Berliner Trinkwasserversorgung mit Gesamtnetzmodell*. Zuse-Institut Berlin, 2004. Studie für ABB Utilities GmbH, Mannheim.
- [7] M. C. STEINBACH, *Topological index criteria for DAE in water networks*, ZIB Report ZR-05-49, Zuse-Institut Berlin, 2005.
- [8] M. WEEGE, *Graphentheoretische Bestimmung regulärer Steuerungskonfigurationen in Wasser-netzen*, Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2007.

## Anhang S: Speicherkennlinien

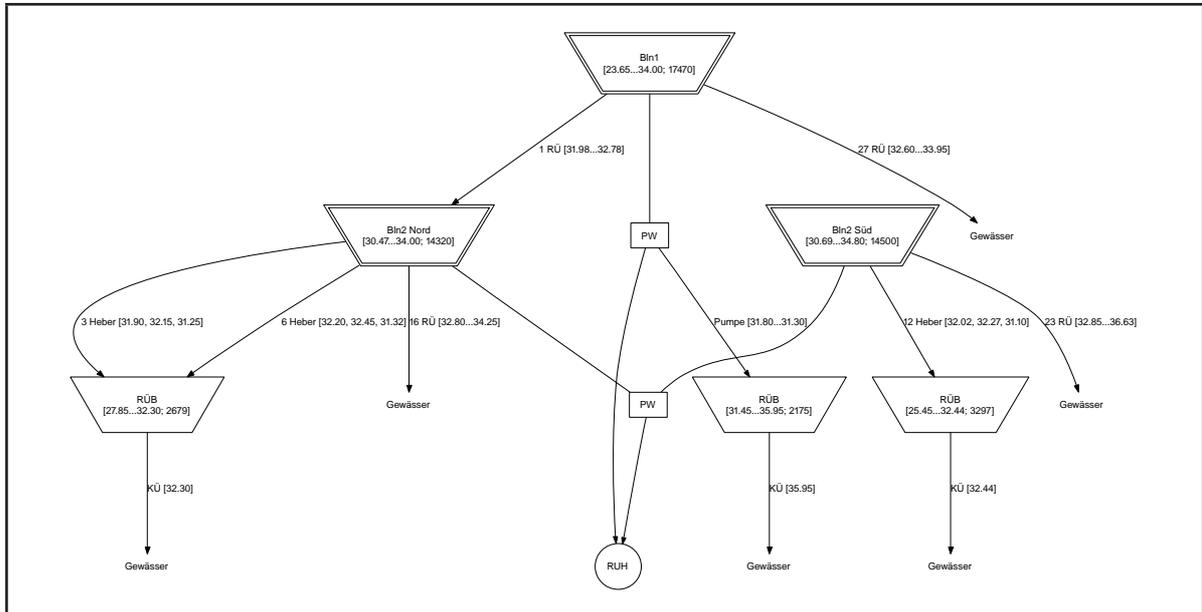
Einen erheblichen Anteil der technischen Arbeiten zur Erstellung des Optimierungsmodells bildete die Erstellung glatter Approximationen der Speicherkennlinien aus den tabellierten Daten. Dieser Abschnitt beschreibt in Stichpunkten die Details zur Modellierung für alle Teilnetze.

Im jeweiligen Approximationsbereich (der eine relativ genaue Approximation erfordert) wird eine gegebene Anzahl  $n$  von Stützstellen  $x_k$  gewählt und ein vollständiger kubischer Spline berechnet, der gegebene Stützwerte  $f_k$  an den Stützstellen interpoliert und am linken/rechten Rand gegebene Ableitungen  $f'_0, f'_n$  hat. Die Stützstellen  $x_k$  sind in unserem Fall Volumenwerte  $\bar{V}_k$ , die Stützwerte  $f_k$  sind die zugehörigen Druckhöhen  $\bar{H}_k$ . Diese Wertepaare werden entweder direkt aus den tabellierten Datenpaaren übernommen oder durch lokale Interpolation erzeugt. Die Ableitungswerte  $f'_0, f'_n$  werden aus Differenzenquotienten der tabellierten Datenpaare gewonnen und in vielen Fällen noch manuell angepasst (z. B. mit einem Skalierungsfaktor multipliziert).

Für alle Approximationen wird die Stützstellenzahl so lange erhöht, bis die maximalen Abweichungen der Druckhöhen innerhalb des Approximationsbereichs etwa 2 cm oder weniger betragen. In einigen Sonderfällen gibt es auch größere Abweichungen in sehr kleinen Bereichen. In den Grafiken sind die Speicherkennlinien und Approximationen gemeinsam dargestellt; der jeweilige Approximationsbereich (sofern vorhanden) ist durch einen roten Rahmen hervorgehoben.

Außerhalb der Approximationsbereiche können die Abweichungen sehr groß werden. Bei der Extrapolation nach rechts (große Volumina/Druckhöhen) liegen aber keine Daten vor, so dass eventuelle Abweichungen ohnehin nicht messbar sind. Im Bereich kleiner Volumina/Druckhöhen liegen zwar Datenpaare vor, hier ist aber der exakte Zusammenhang zwischen Volumen und Druckhöhe für das Optimierungsmodell völlig irrelevant. Dies bedeutet, dass auch große Abweichungen keinen Einfluss auf die Menge der optimalen Lösungen des Modells haben. Umgekehrt ist sogar zu erwarten, dass die von uns verwendete lineare Extrapolation nach links die Konvergenz beschleunigt.

## Teilnetz Bln1 & Bln2

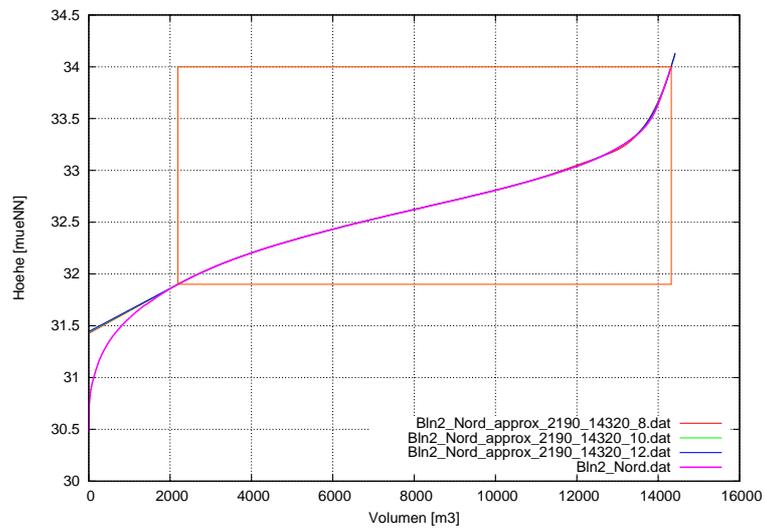
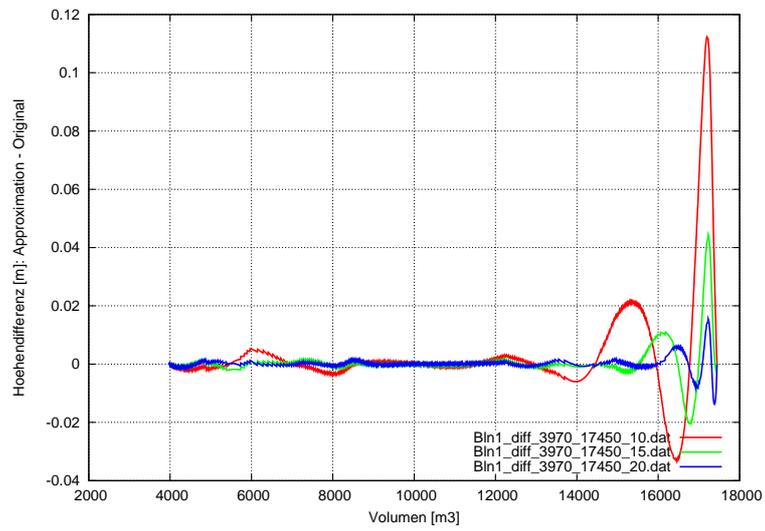
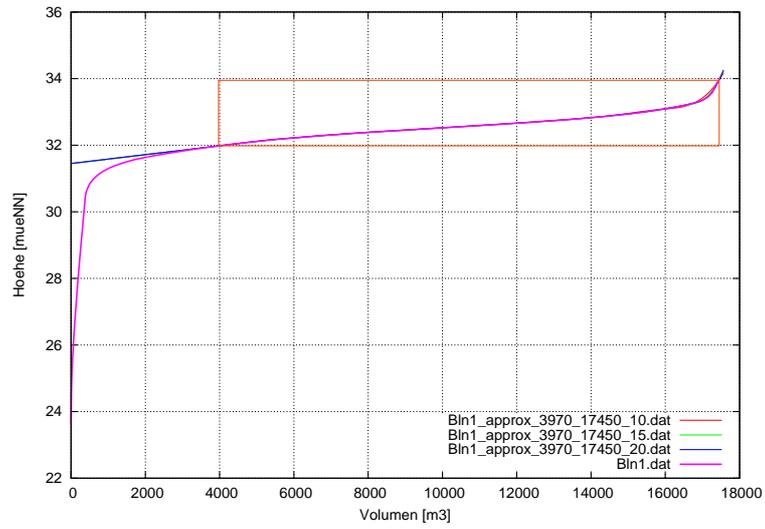


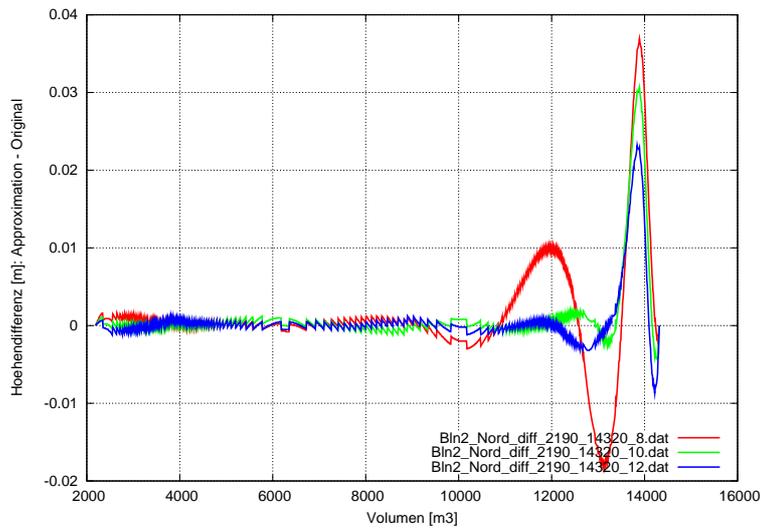
### Bln1

- 1748 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $3970 \text{ m}^3$ ,  $31.98 \text{ müNN}$ ) und ( $17450 \text{ m}^3$ ,  $33.95 \text{ müNN}$ )
  - *Approximation 1*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 0.8 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 15 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.05 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 20 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.2 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

### Bln2 Nord

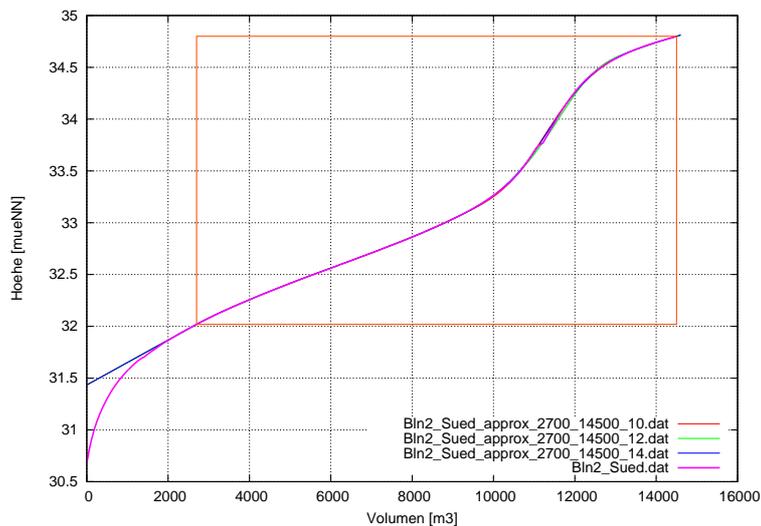
- 1433 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $2190 \text{ m}^3$ ,  $31.90 \text{ müNN}$ ) und ( $14320 \text{ m}^3$ ,  $34.00 \text{ müNN}$ )
  - *Approximation 1*: mit 8 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.08 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.05 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.06 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.1 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 12 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.04 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.15 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls





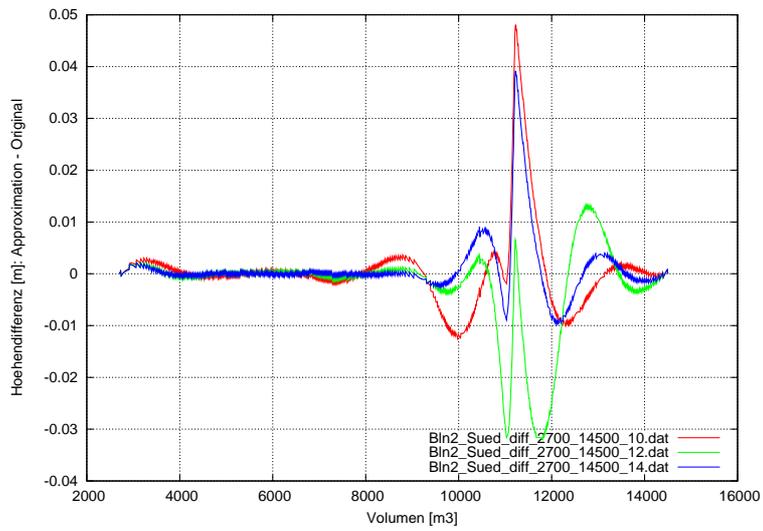
## Bln2 Süd

- 1451 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $2700 \text{ m}^3$ , 32.019 müNN) und ( $14500 \text{ m}^3$ , 34.80 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 10 Stützstellen
  - *Approximation 2*: mit 12 Stützstellen
  - *Approximation 3*: mit 14 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

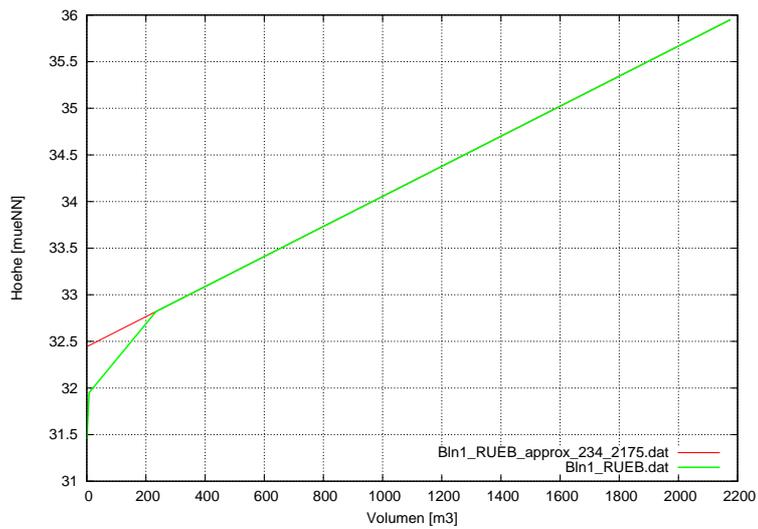


## RÜB Bln1

- 4 Datenpaare

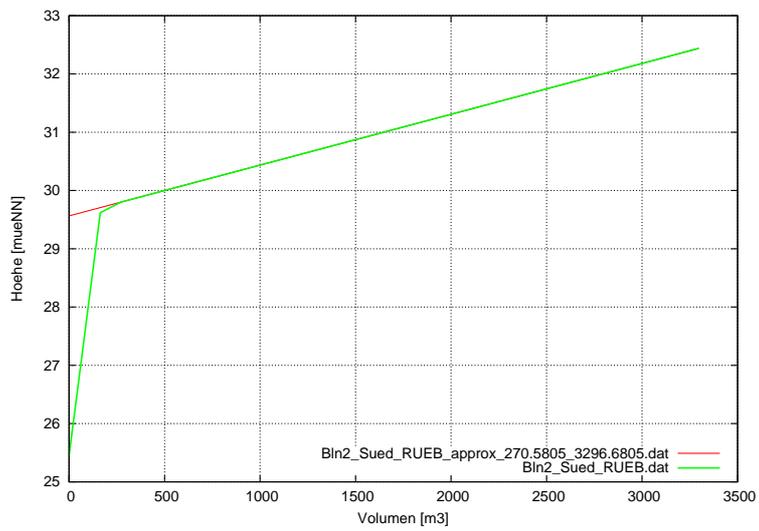
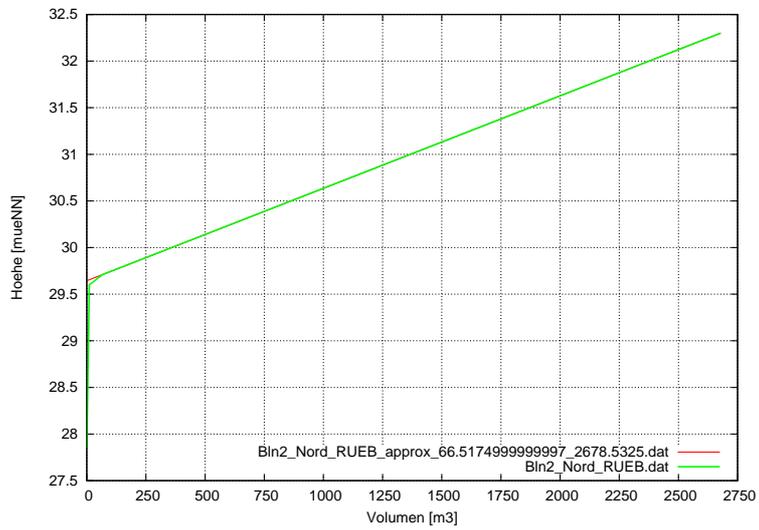


- lineare Approximation/Extrapolation mit den letzten beiden Stützpunkten

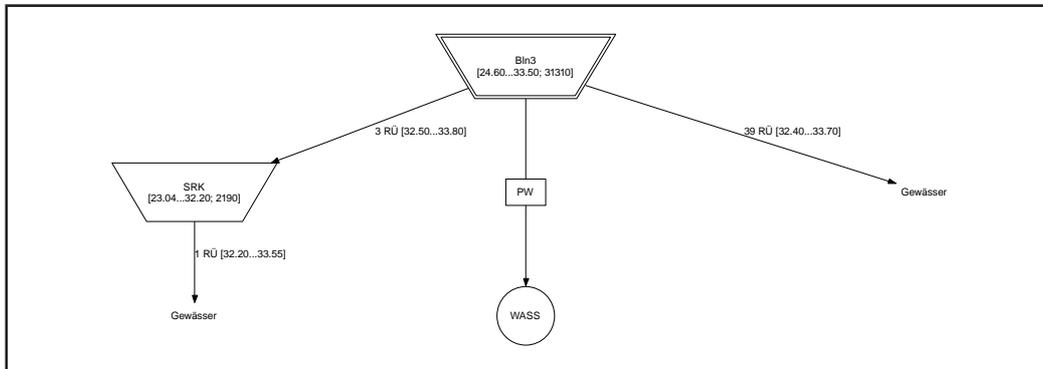


### RÜB Bln2 Nord, RÜB Bln2 Süd

- 4 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit dem 3. und 4. Stützpunkt

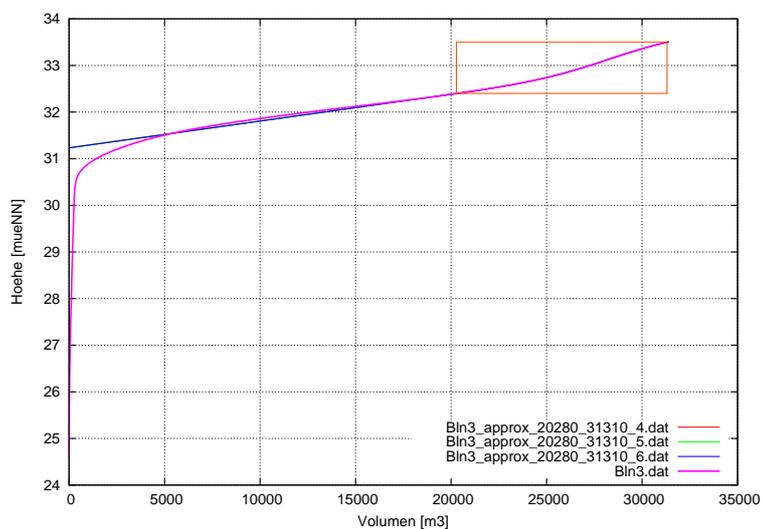


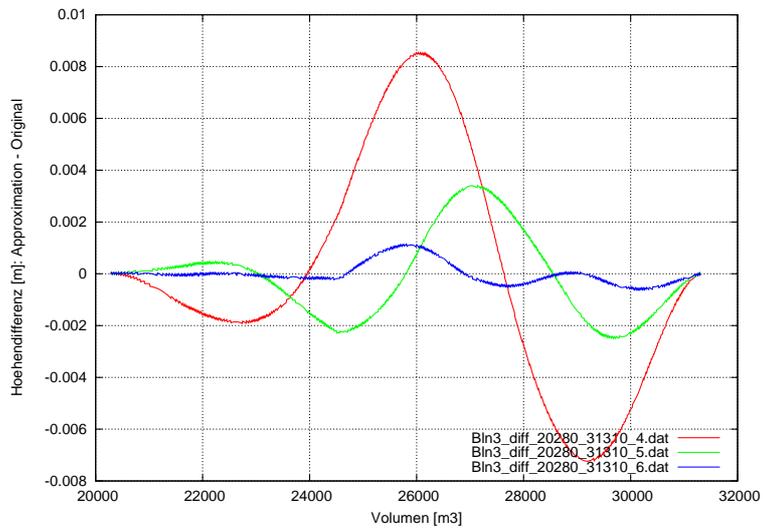
## Teilnetz Bln3



## Bln3

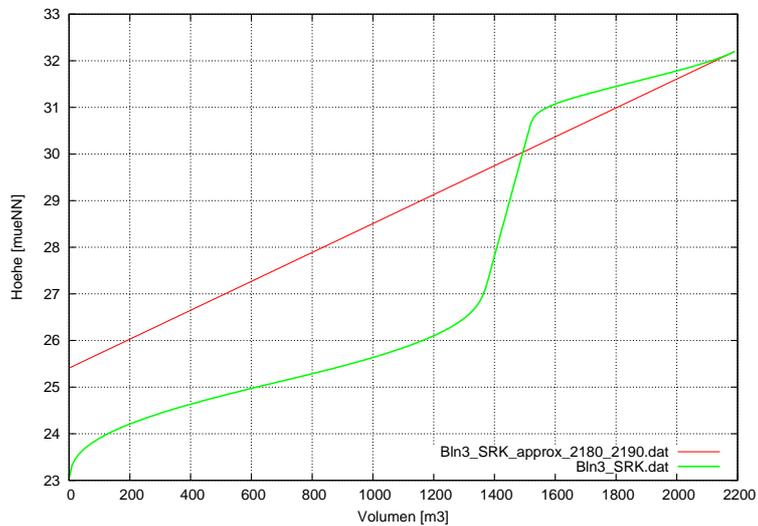
- 3132 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen (20280 m<sup>3</sup>, 32.3995 müNN) und (31310 m<sup>3</sup>, 33.5002 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 4 Stützstellen
  - *Approximation 2*: mit 5 Stützstellen;
  - *Approximation 3*: mit 6 Stützstellen;
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls



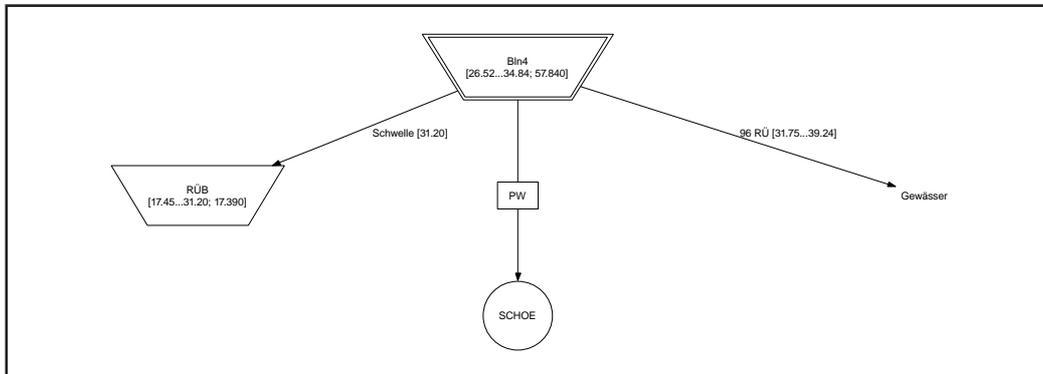


### SRK Bln3

- 220 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den letzten beiden Stützpunkten
- Problematik: ab unterster Kante der Regenüberläufe keine Daten vorhanden

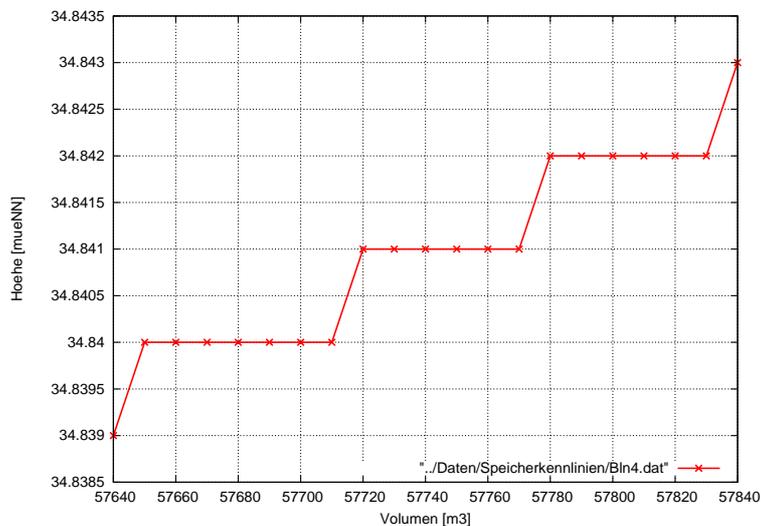


## Teilnetz Bln4

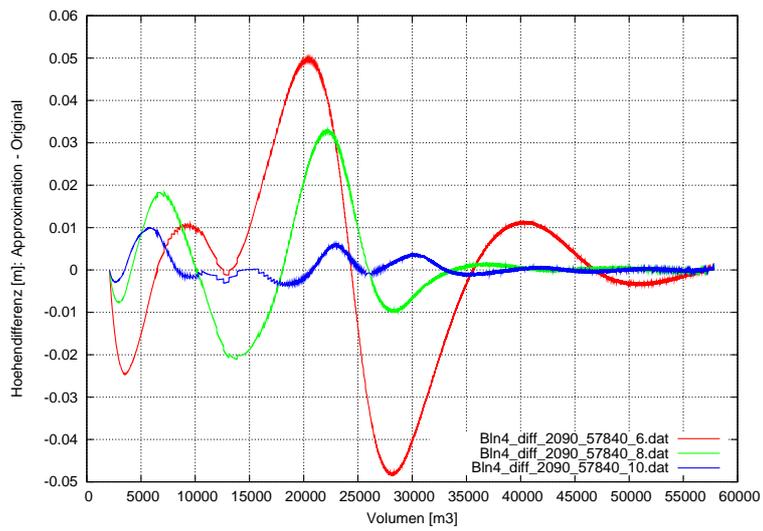
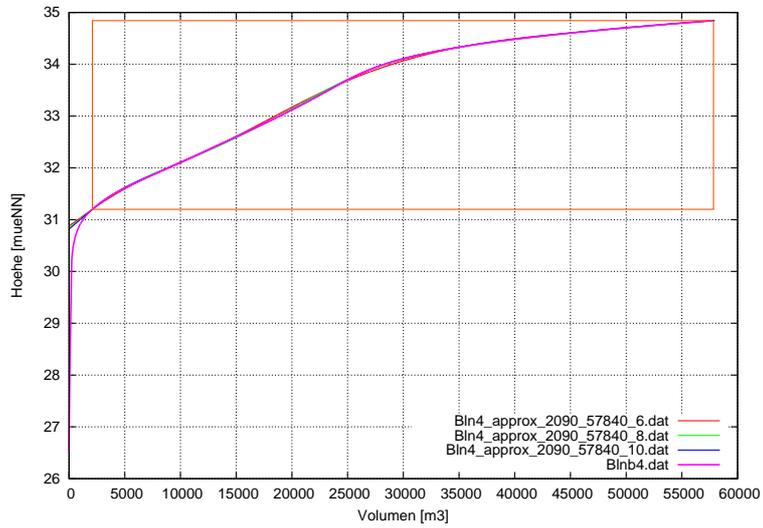


## Bln4

- 5785 Datenpaare
- Daten sind nicht immer streng monoton steigend:  
Die Berechnung des Anstiegs  $f'_n$  der rechten Grenze des Approximationsintervalls erfolgt standardmäßig mit dem 5779. und dem 5785. Stützpunkt. Eine zusätzliche Skalierung ist nicht notwendig.

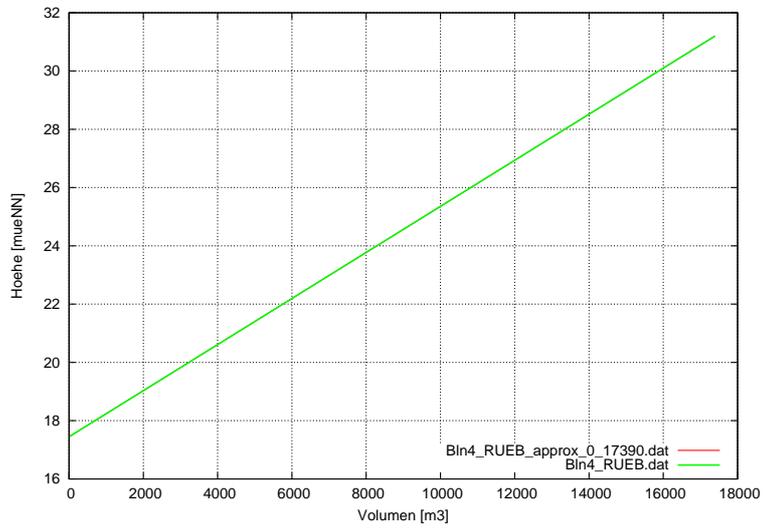


- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (2090 m<sup>3</sup>, 31.19982 müNN) und (57840 m<sup>3</sup>, 34.843 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 6 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.8 skaliert
  - *Approximation 2:* mit 8 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.9 skaliert
  - *Approximation 3:* mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.95 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

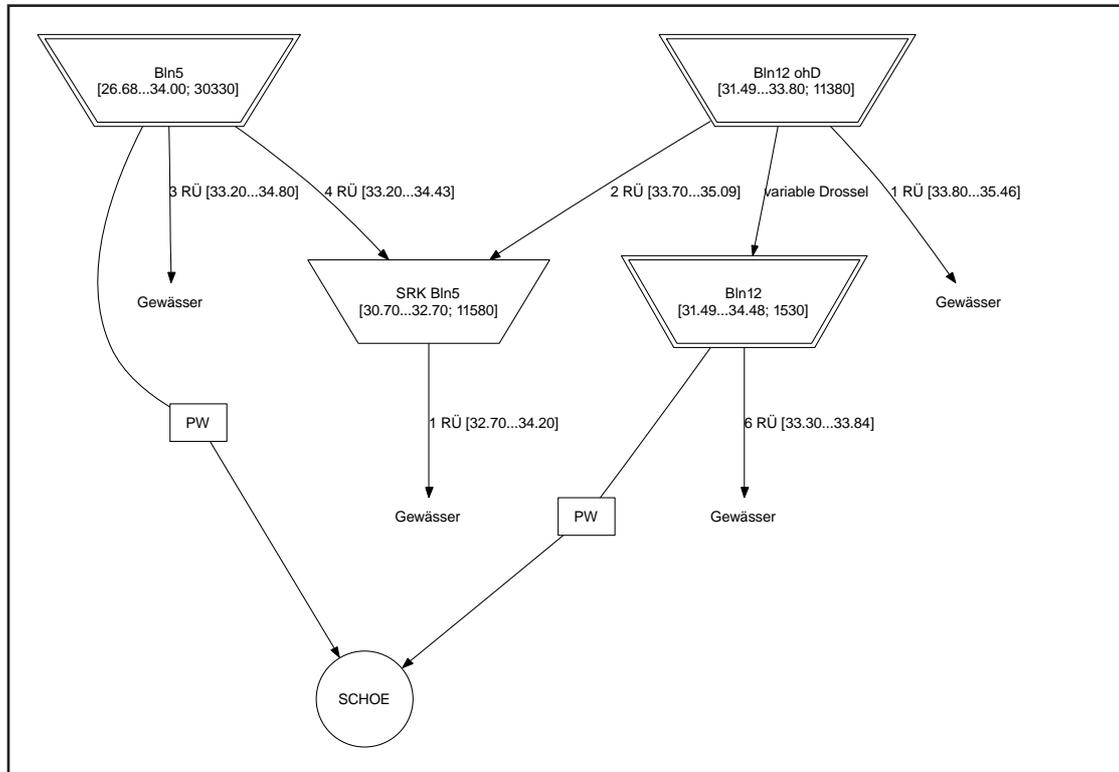


## RÜB Bln4

- 2 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den beiden Stützpunkten



## Teilnetz Bln5 & Bln12

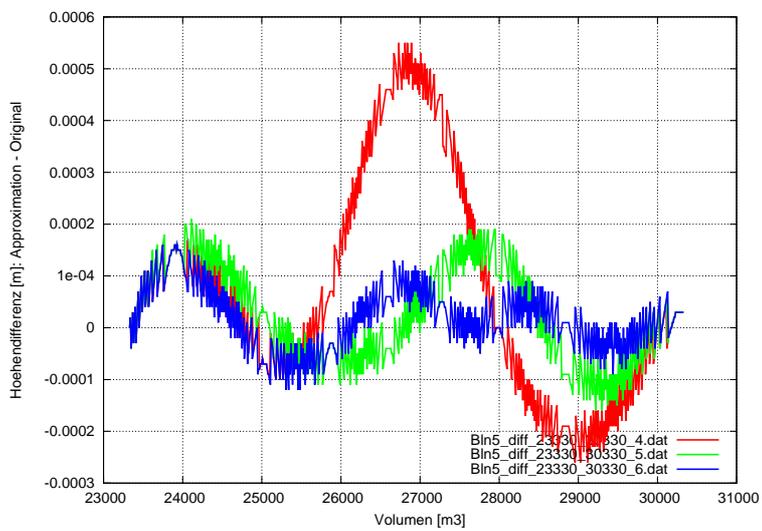
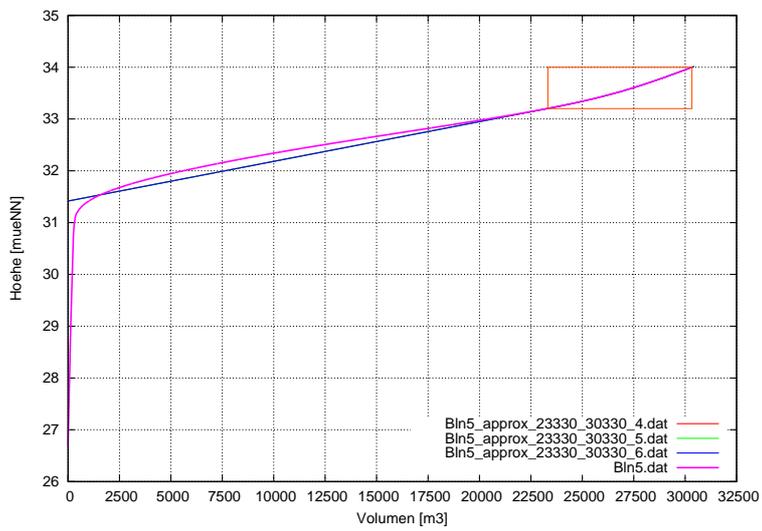
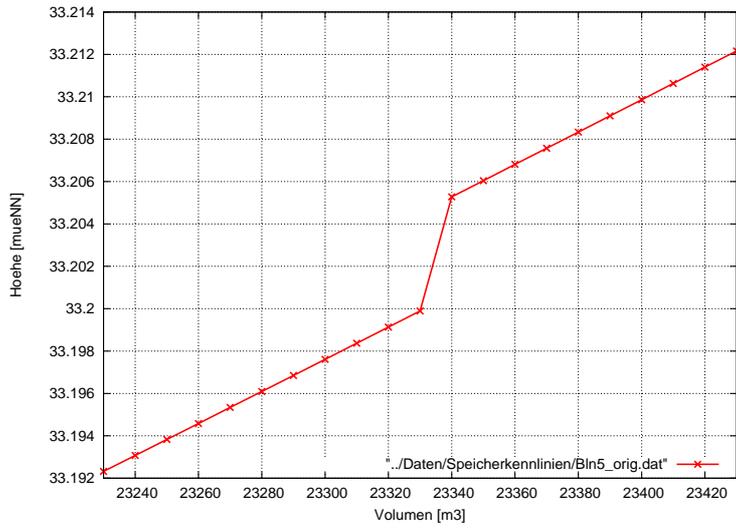


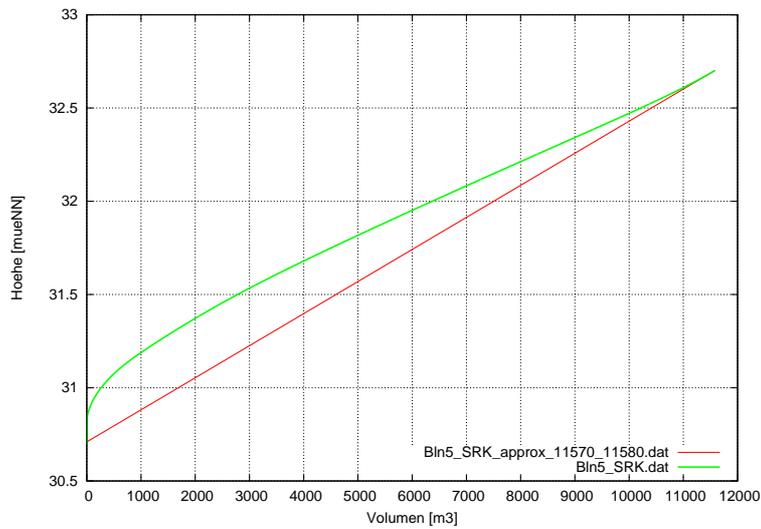
### Bln5

- 3034 Datenpaare
- *Besonderheit:* Bei 23330 m<sup>3</sup> gibt es einen Knick. Dieser wird korrigiert, indem zu allen Werten kleiner gleich 30330 m<sup>3</sup> 0.00463 dazu addiert wird.
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (23330 m<sup>3</sup>, 33.19989 müNN) und (30330 m<sup>3</sup>, 33.99997 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 4 Stützstellen
  - *Approximation 2:* mit 5 Stützstellen
  - *Approximation 3:* mit 6 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

### SRK Bln5

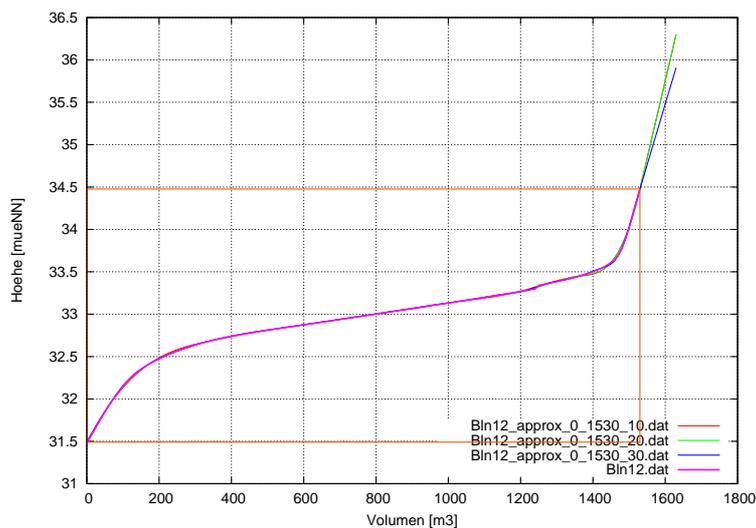
- 1159 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den letzten beiden Stützpunkten
- Problematik: ab unterster Kante der Regenüberläufe keine Daten vorhanden





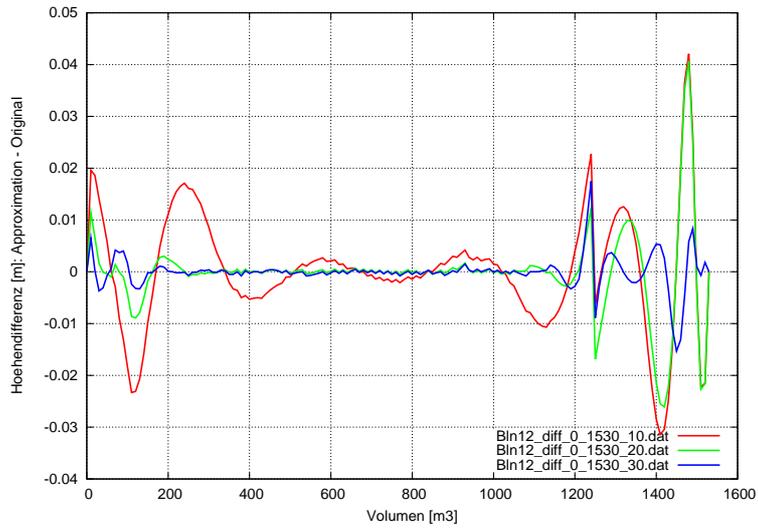
## Bln12

- 154 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $0 \text{ m}^3$ ,  $31.491 \text{ müNN}$ ) und ( $1530 \text{ m}^3$ ,  $34.47691 \text{ müNN}$ )
  - *Approximation 1*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.15 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.4 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 20 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.4 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 30 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.9 skaliert und Anstieg  $f'_n$  mit 1.1 skaliert
- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in der rechten Grenze des Approximationsintervalls

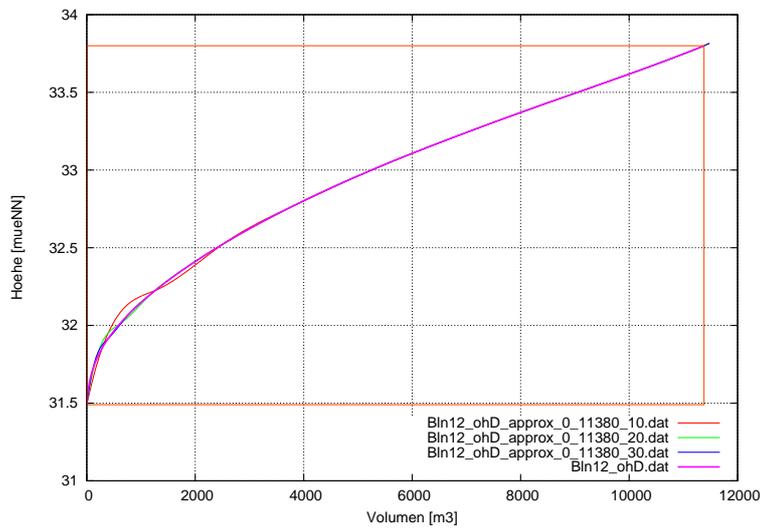


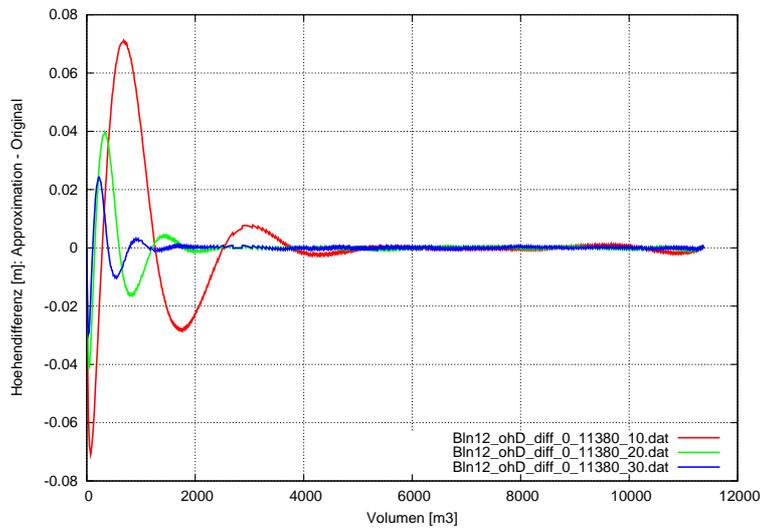
## Bln12 ohD

- 1517 Datenpaare

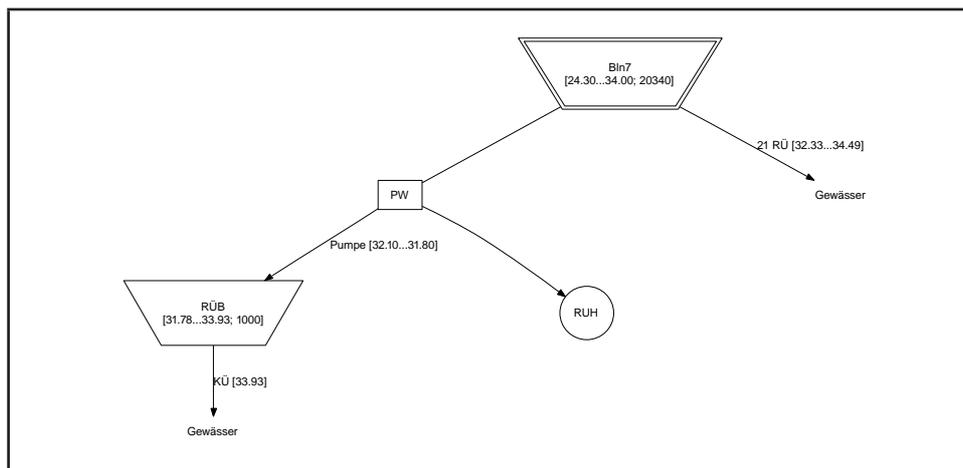


- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen ( $0 \text{ m}^3$ , 31.49 müNN) und ( $11380 \text{ m}^3$ , 33.80 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.6 skaliert
  - *Approximation 2:* mit 20 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.85 skaliert
  - *Approximation 3:* mit 30 Stützstellen
- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in der rechten Grenze des Approximationsintervalls



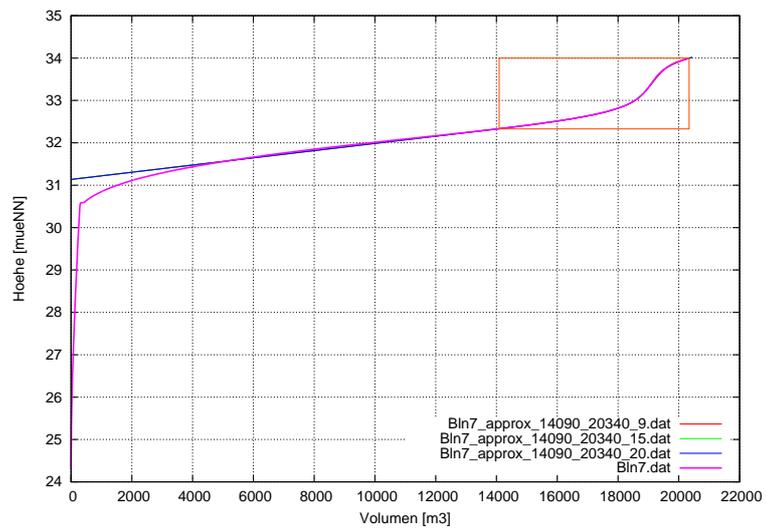
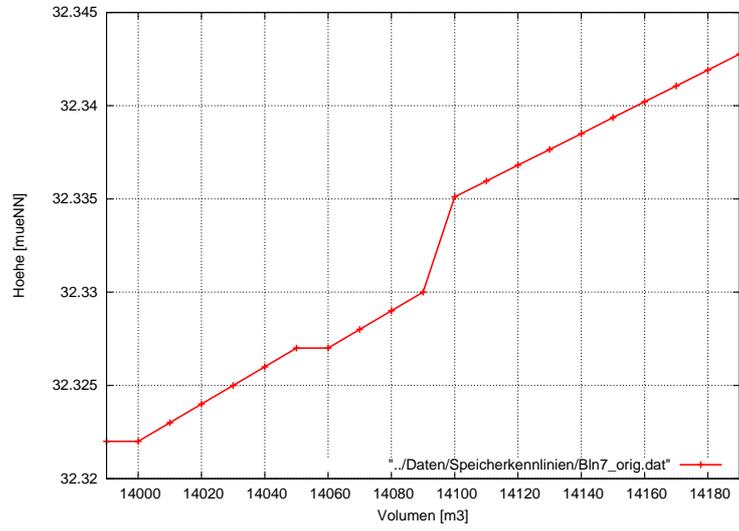


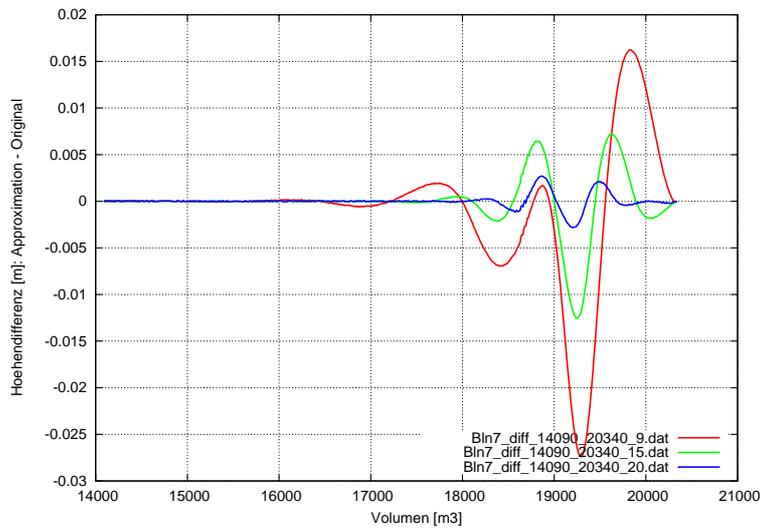
## Teilnetz Bln7



## Bln7

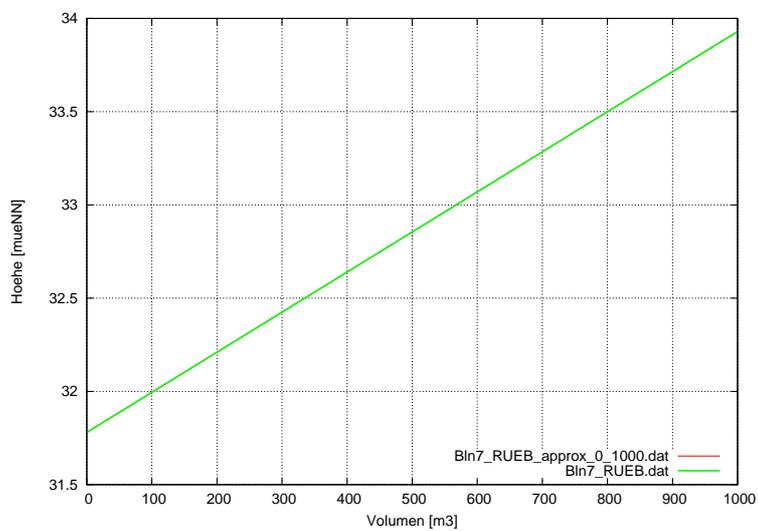
- 2035 Datenpaare
- *Besonderheit:* Bei  $14090 \text{ m}^3$  gibt es einen Knick. Dieser wird korrigiert, indem zu allen Werten kleiner gleich  $14090 \text{ m}^3$   $0.00426$  dazu addiert wird.
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen ( $14090 \text{ m}^3$ ,  $32.33 \text{ müNN}$ ) und ( $20340 \text{ m}^3$ ,  $33.99923 \text{ müNN}$ )
  - *Approximation 1:* mit 9 Stützstellen
  - *Approximation 2:* mit 15 Stützstellen
  - *Approximation 3:* mit 20 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls



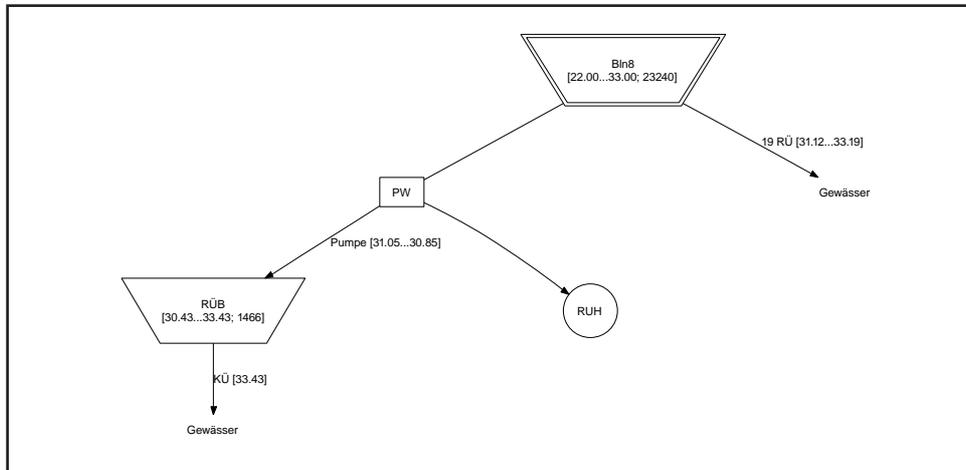


## RÜB Bln7

- 2 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den beiden Stützpunkten

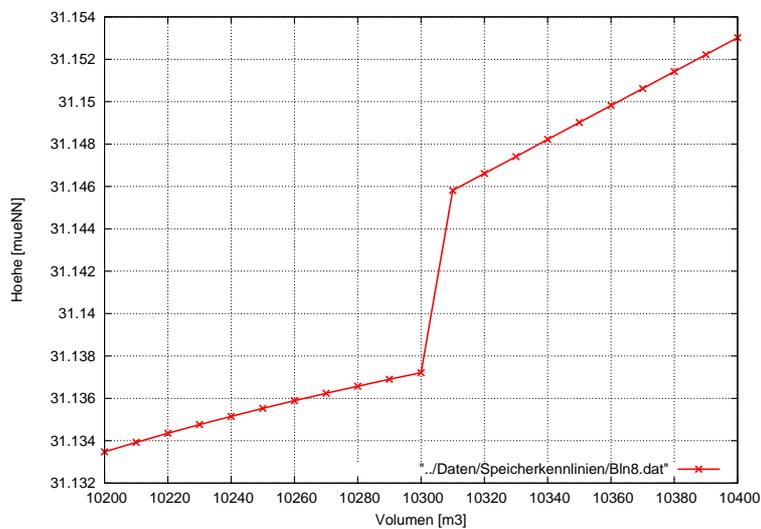


## Teilnetz Bln8

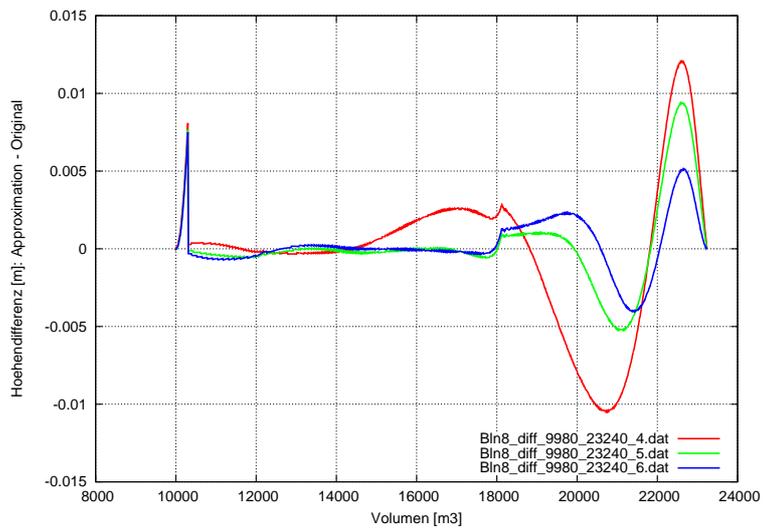
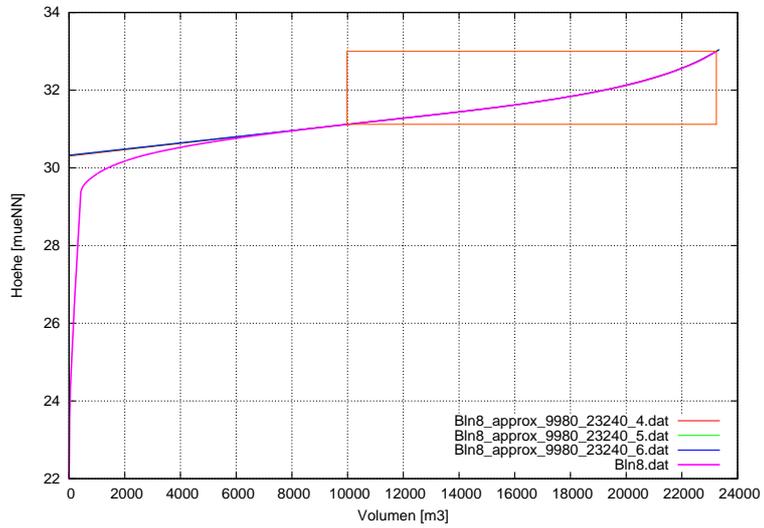


## Bln8

- 2035 Datenpaare
- *Besonderheit:* Bei 10300 m<sup>3</sup> gibt es einen Knick, der jedoch nicht störend für die Approximation ist.

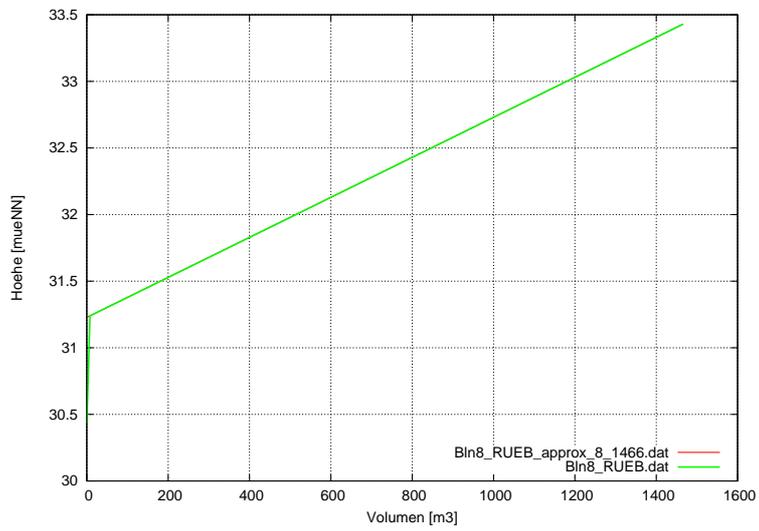


- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (9980 m<sup>3</sup>, 31.11933 müNN) und (23240 m<sup>3</sup>, 33.0024 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 4 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.05 und Anstieg  $f'_n$  mit 0.95 skaliert
  - *Approximation 2:* mit 5 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.03 und Anstieg  $f'_n$  mit 0.97 skaliert
  - *Approximation 3:* mit 6 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.02
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

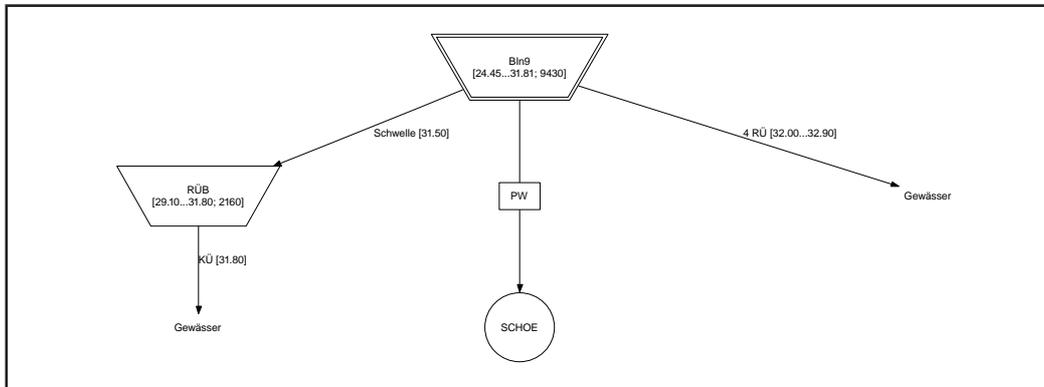


## RÜB Bln8

- 3 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit dem zweiten und dritten Stützpunkt

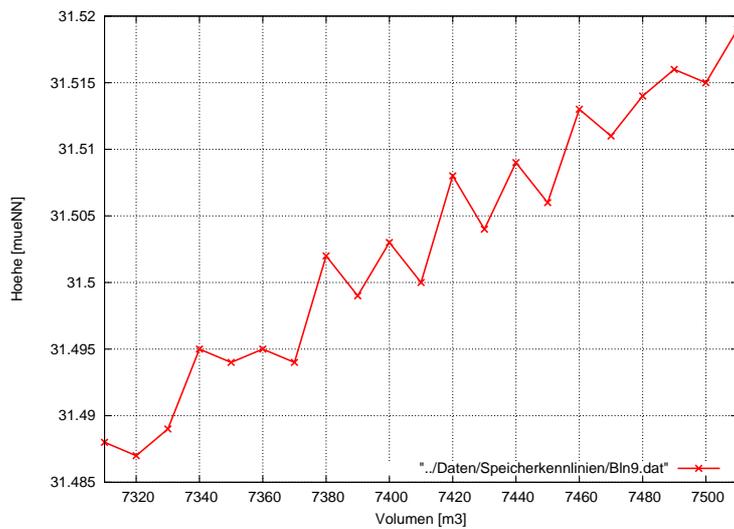


## Teilnetz Bln9

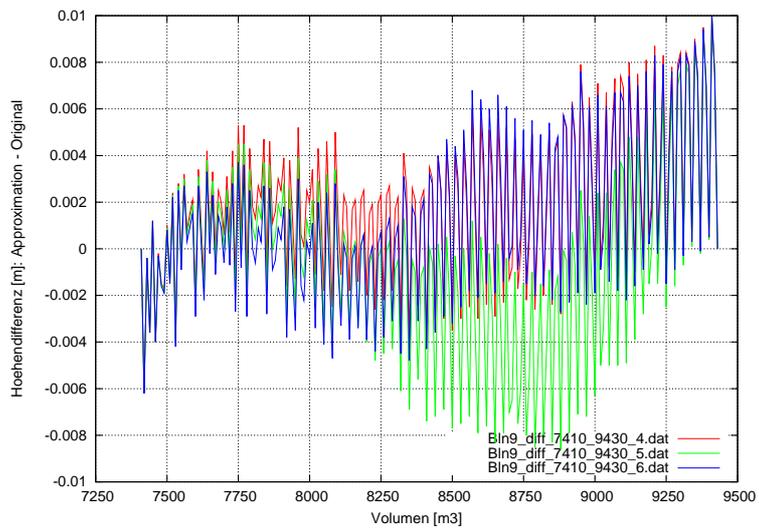
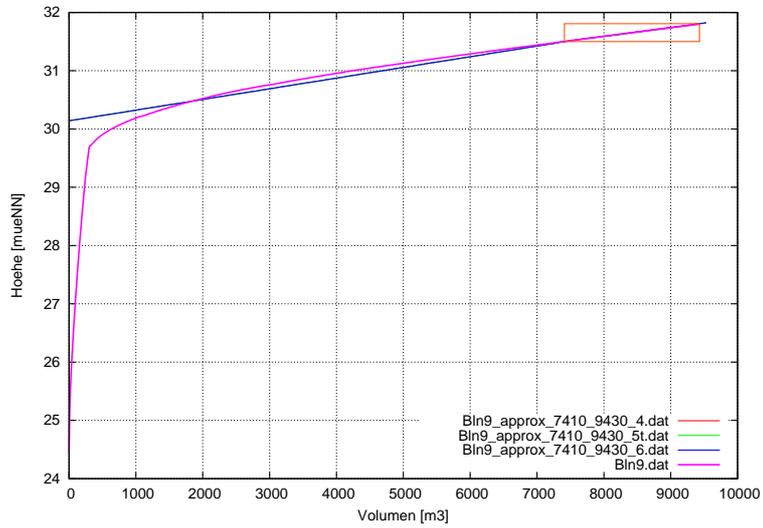


## Bln9

- 944 Datenpaare
- *Besonderheit:* Daten sind teilweise streng monoton fallend

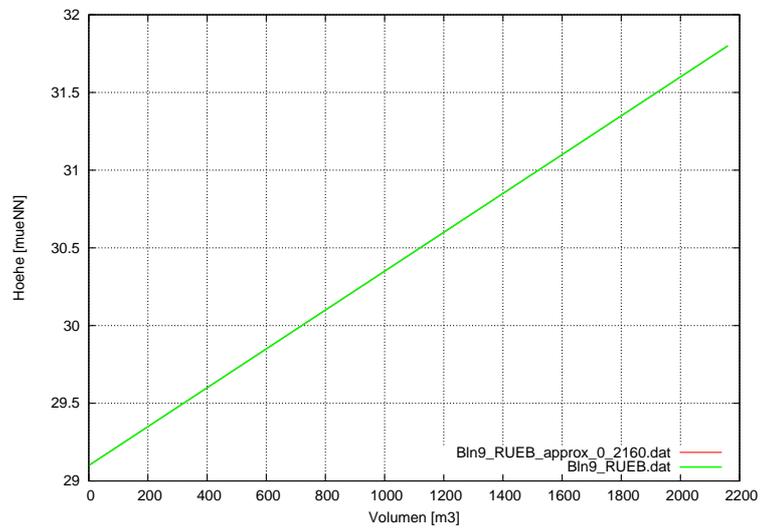


- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (7410 m<sup>3</sup>, 31.50 müNN) und (9430 m<sup>3</sup>, 31.808 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 4 Stützstellen
  - *Approximation 2:* mit 5 Stützstellen
  - *Approximation 3:* mit 6 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

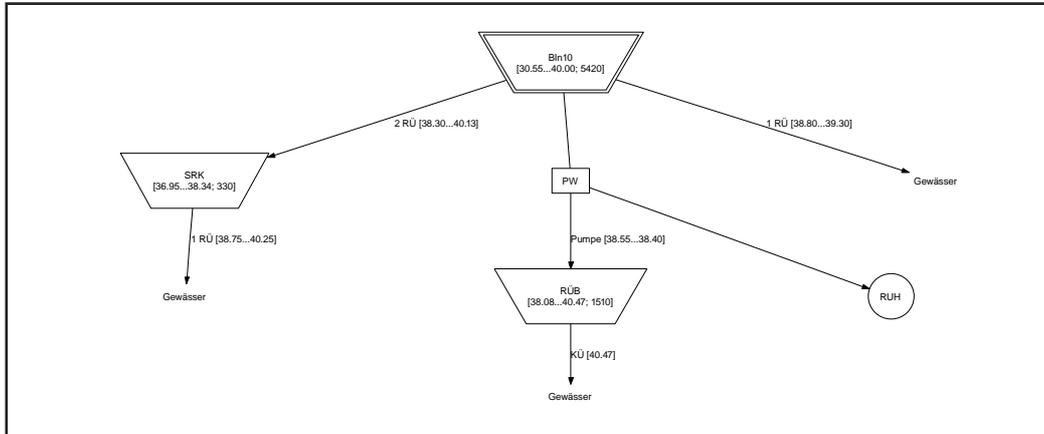


## RÜB Bln9

- 2 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den beiden Stützpunkten

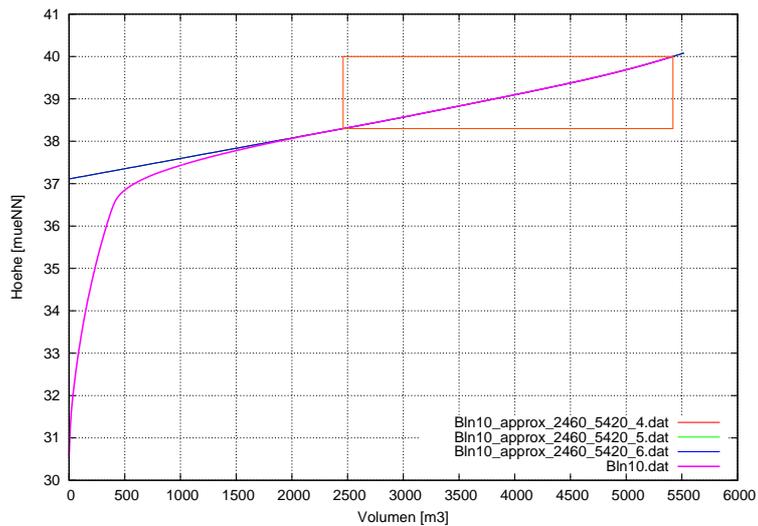


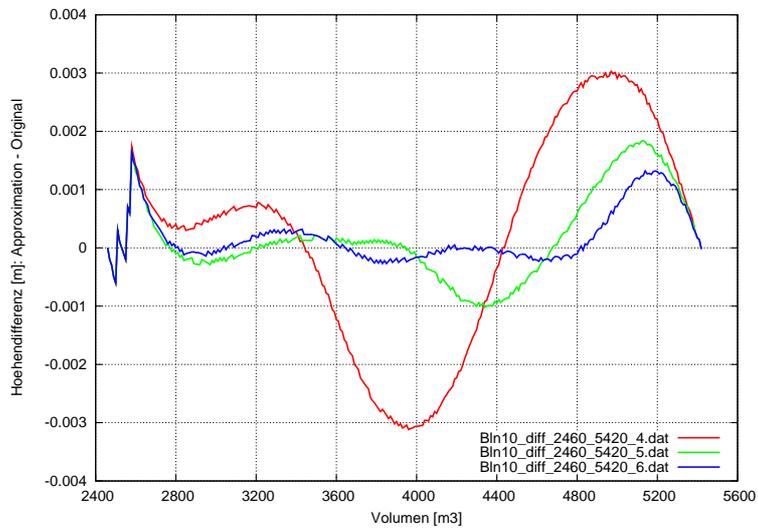
## Teilnetz Bln10



## Bln10

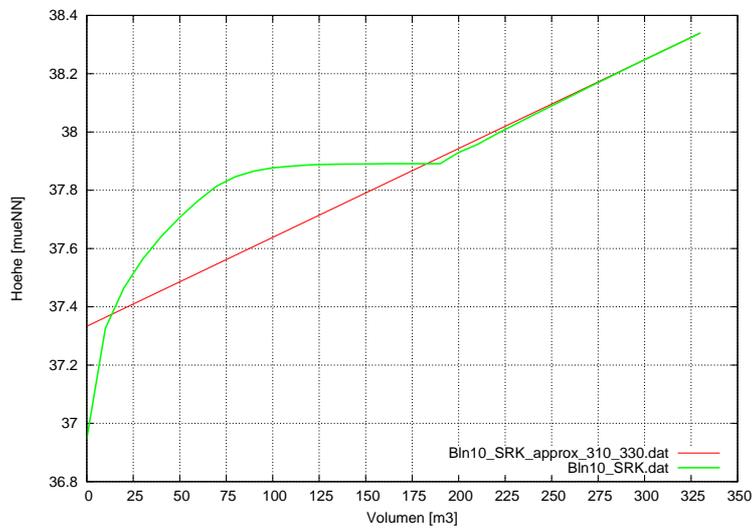
- 543 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen  $(2460 \text{ m}^3, 38.30 \text{ müNN})$  und  $(5420 \text{ m}^3, 40.00112 \text{ müNN})$
  - *Approximation 1*: mit 4 Stützstellen
  - *Approximation 2*: mit 5 Stützstellen
  - *Approximation 3*: mit 6 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls





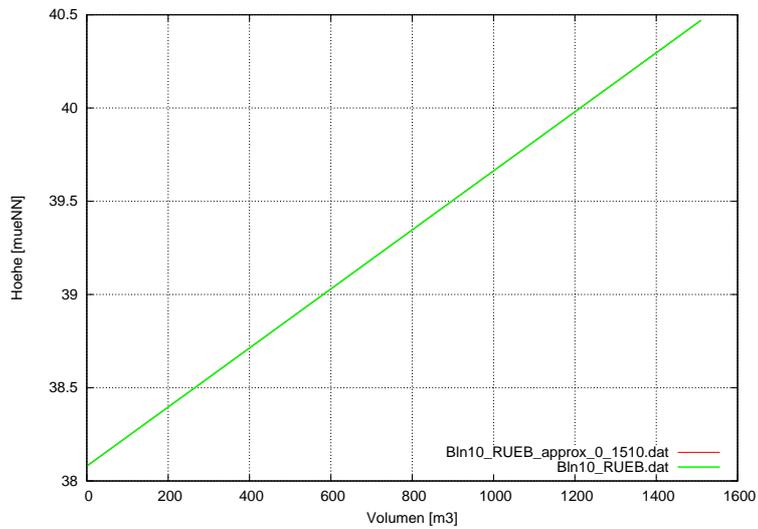
### SRK Bln10

- 34 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit dem 32. und 34. Stützpunkt, da nur die letzten 4cm genau approximiert werden müssen

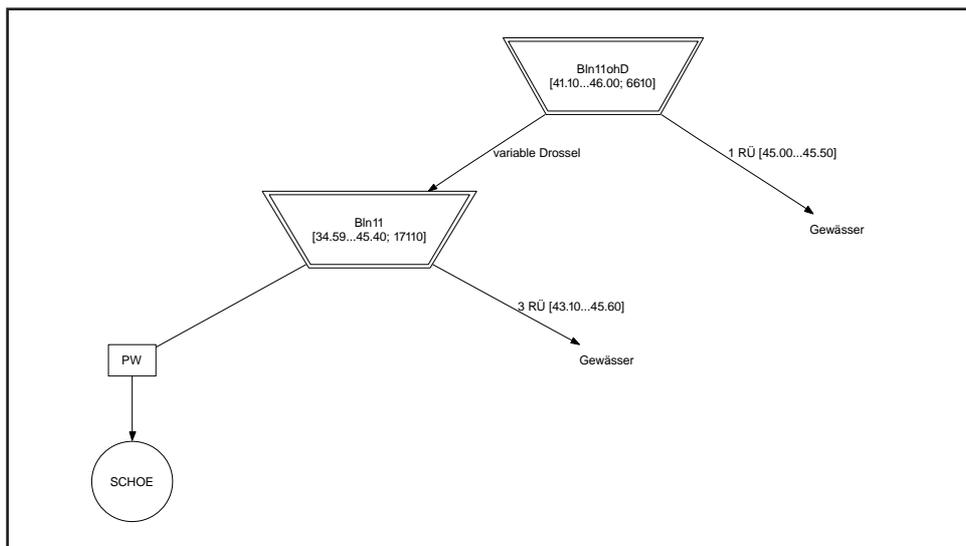


### RÜB Bln10

- 2 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den beiden Stützpunkten

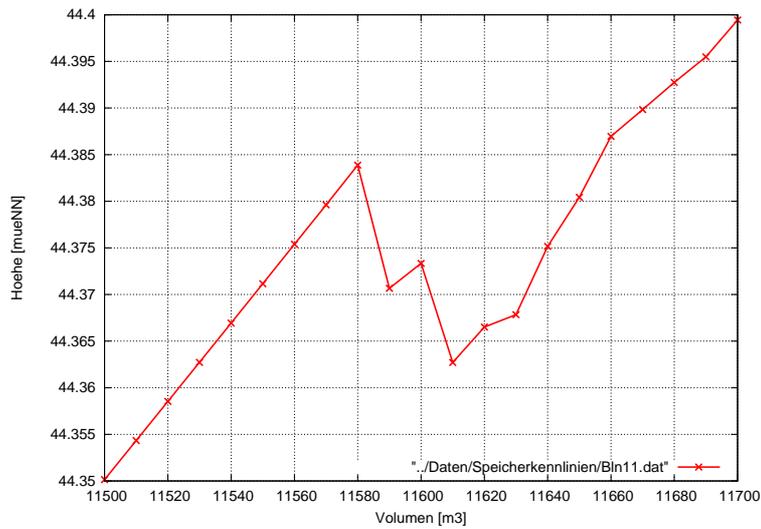


## Teilnetz Bln11

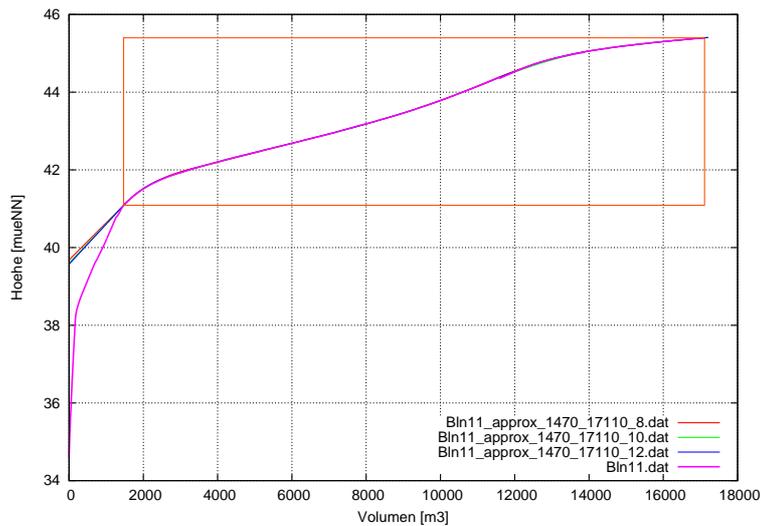


## Bln11

- 1712 Datenpaare
- *Besonderheit:* Ab  $11580 \text{ m}^3$  gibt es einen Knick und fallende Werte, was jedoch nicht störend für die Approximation ist.
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen  $(1470 \text{ m}^3, 41.08837 \text{ müNN})$  und  $(17110 \text{ m}^3, 45.40046 \text{ müNN})$
  - *Approximation 1:* mit 8 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.88 skaliert
  - *Approximation 2:* mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.93 skaliert

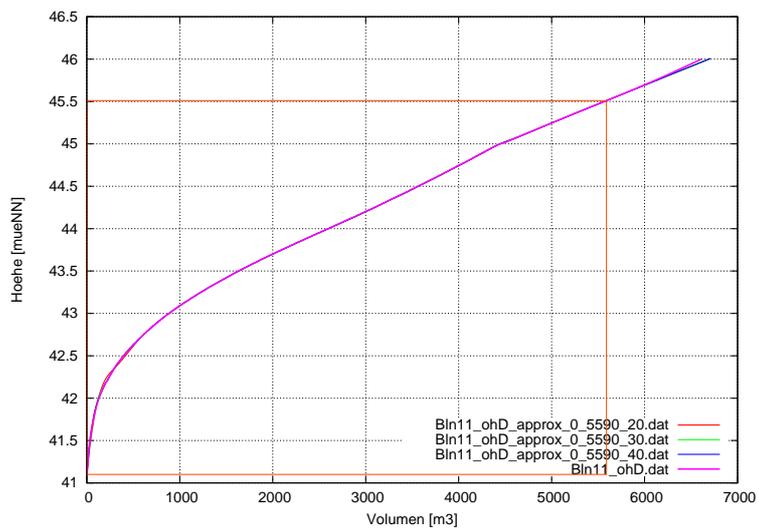
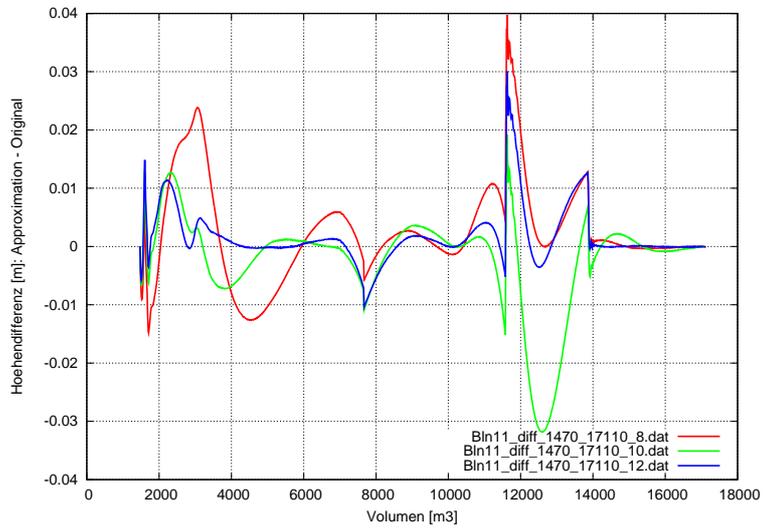


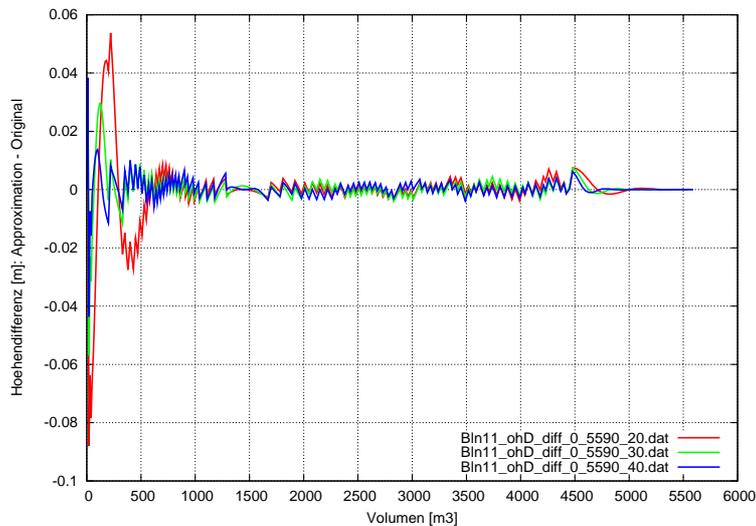
- *Approximation 3*: mit 12 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.95 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls



## Bln11 ohD

- 302 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $0 \text{ m}^3$ ,  $41.10 \text{ müNN}$ ) und ( $5590 \text{ m}^3$ ,  $45.51099 \text{ müNN}$ )
  - *Approximation 1*: mit 20 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.1 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 30 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.3 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 40 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.4 skaliert
- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls





## Teilnetz Chb1 & Chb3

### Chb1

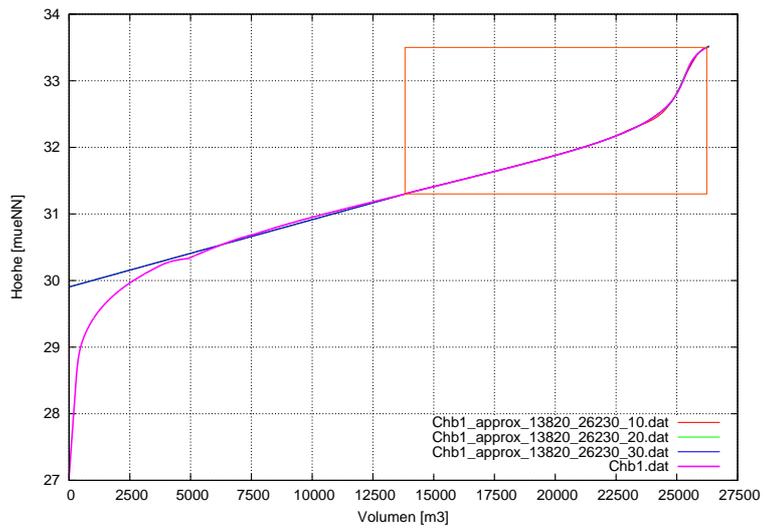
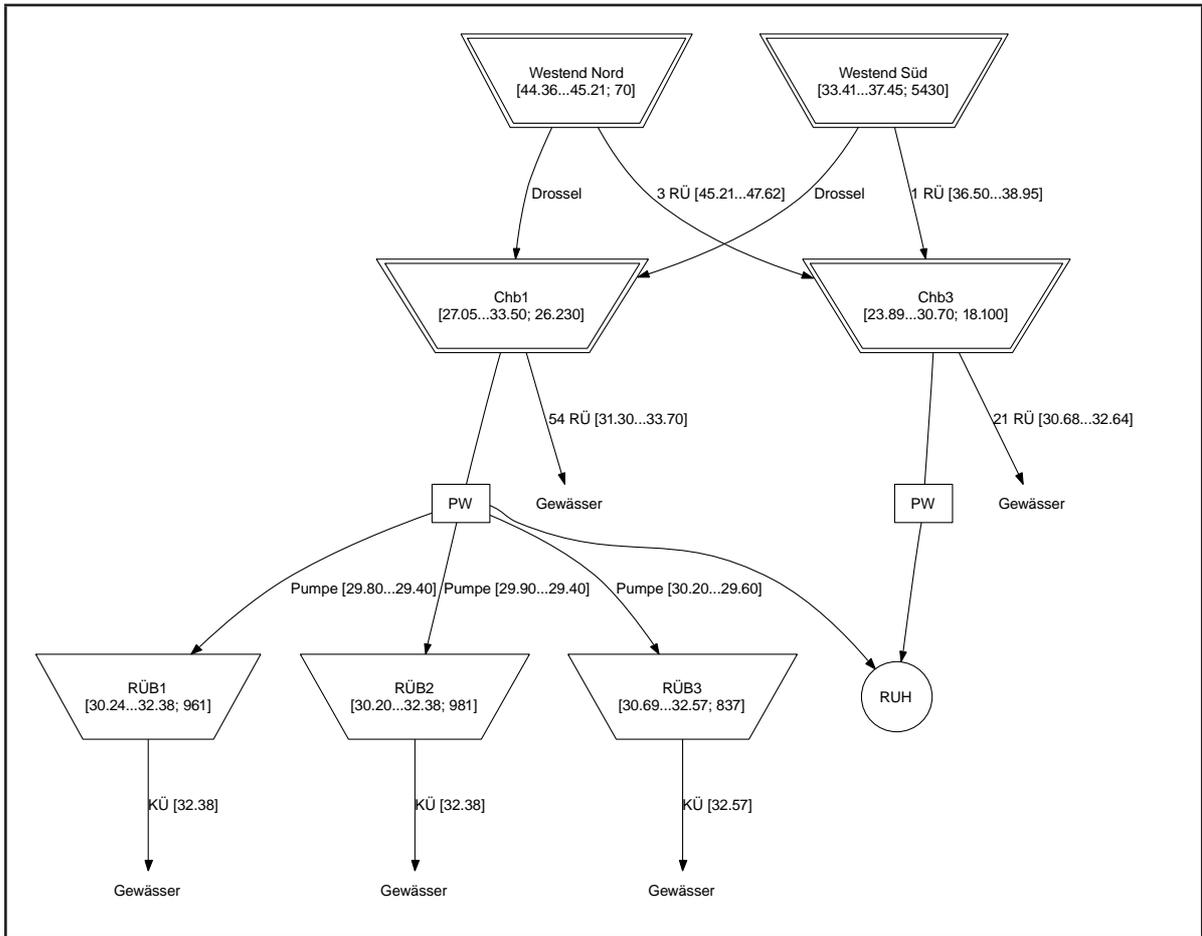
- 2624 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $13820 \text{ m}^3$ , 31.30 müNN) und ( $26230 \text{ m}^3$ , 33.50119 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.6 und Anstieg  $f'_n$  mit 0.2 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 20 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.6 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 30 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.6 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

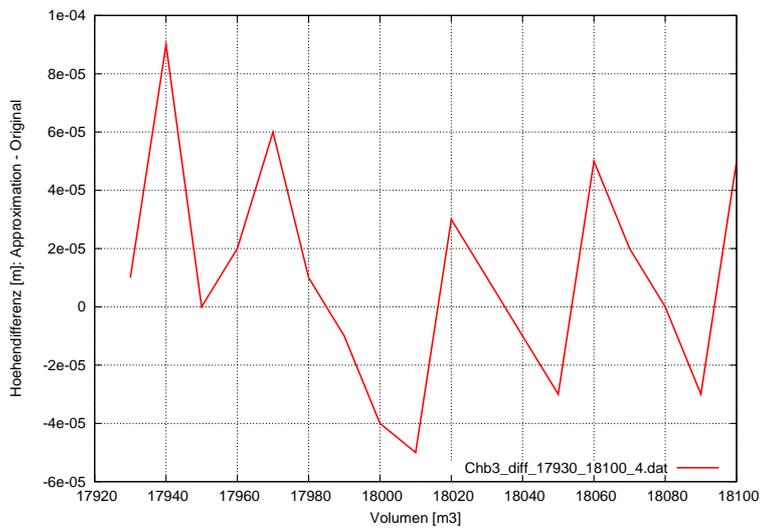
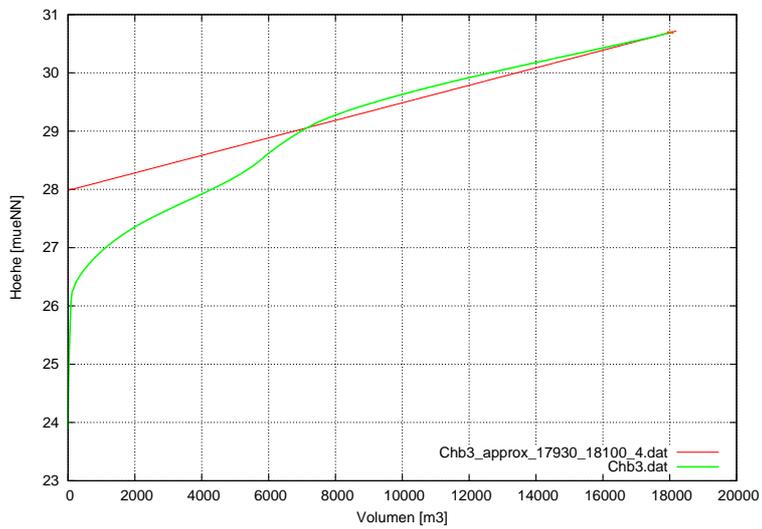
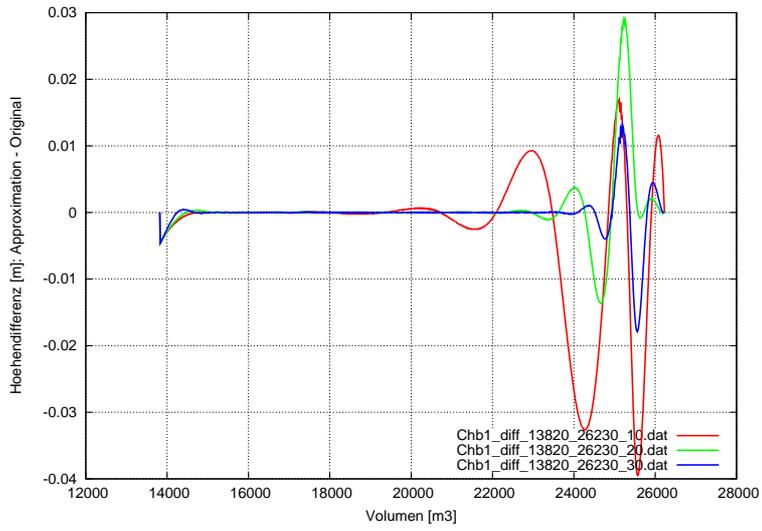
### Chb3

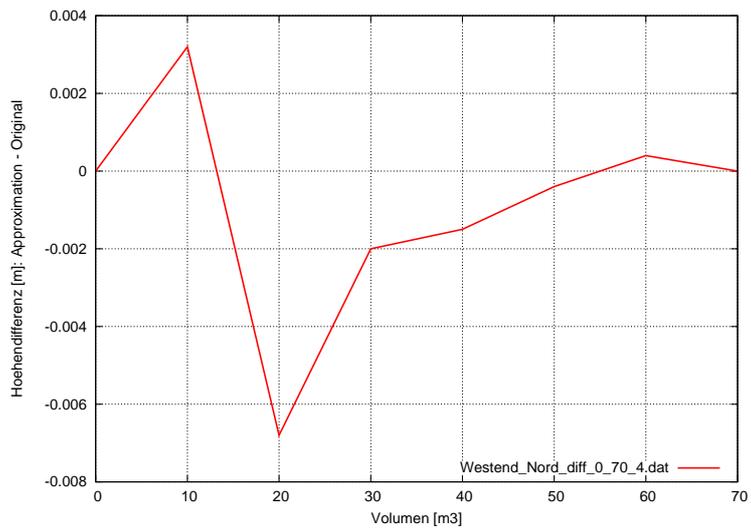
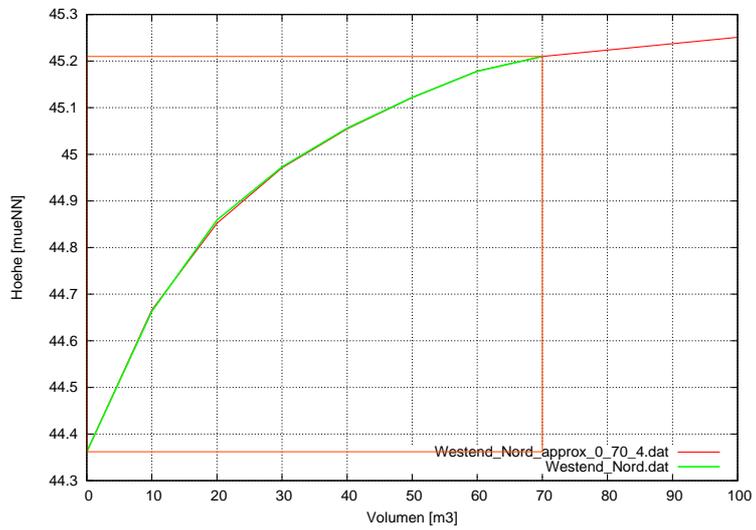
- 1811 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $17930 \text{ m}^3$ , 30.67879 müNN) und ( $18100 \text{ m}^3$ , 30.70455 müNN);
  - *Approximation 1*: mit 4 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

### Westend Nord

- 8 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $0 \text{ m}^3$ , 44.362 müNN) und ( $70 \text{ m}^3$ , 45.21 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 4 Stützstellen
- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in der rechten Grenze des Approximationsintervalls

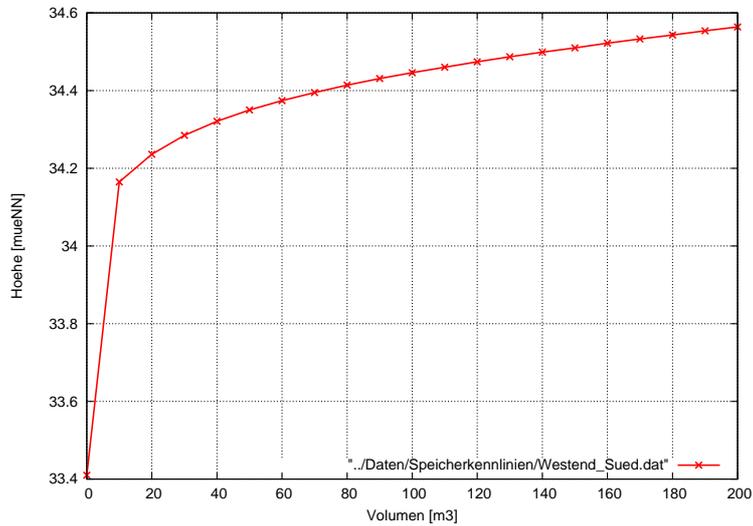




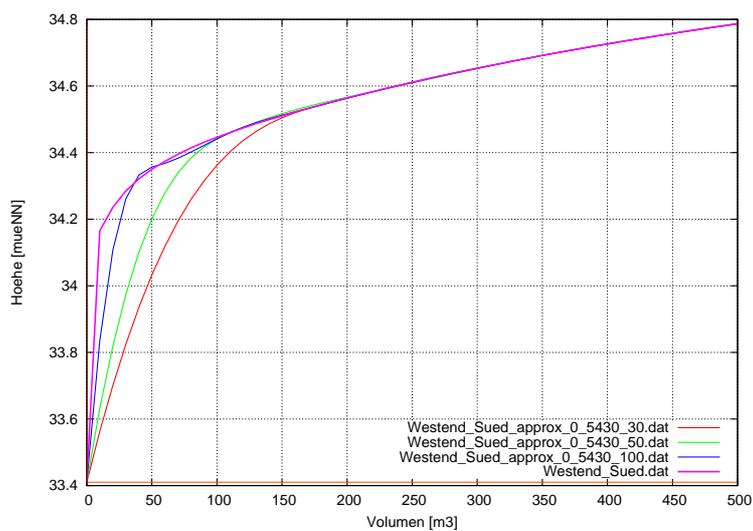


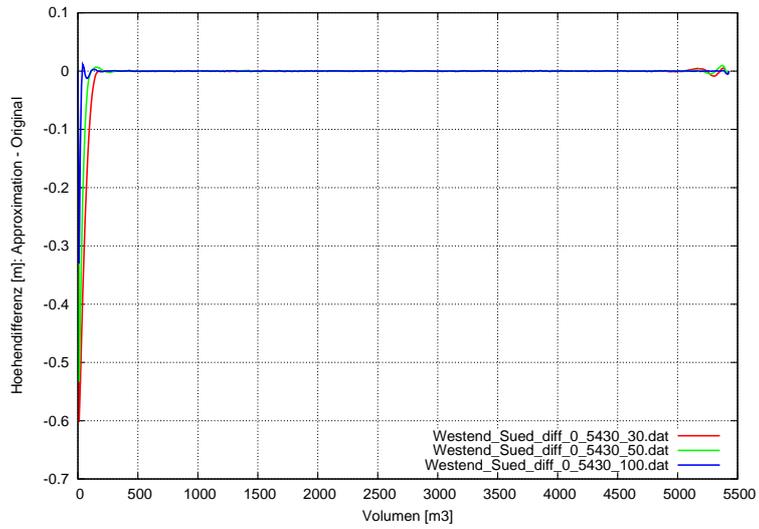
## Westend Süd

- 544 Datenpaare
- *Besonderheit:* sehr große Höhendifferenz vom ersten zum zweiten Stützpunkt



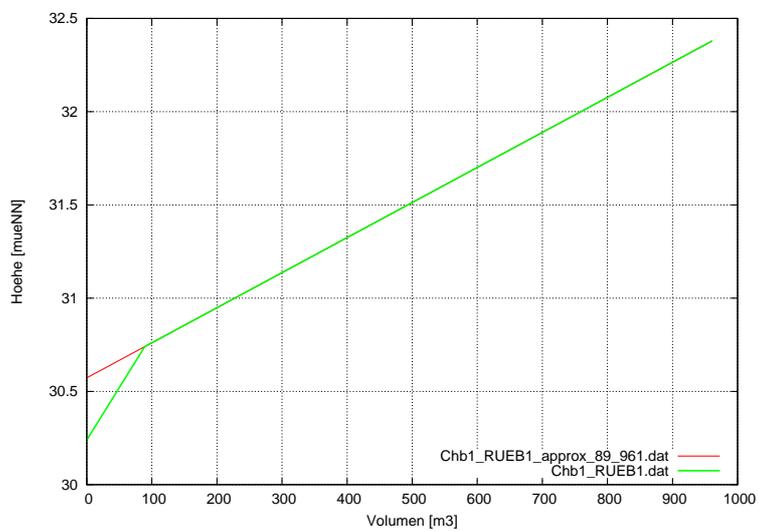
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (0 m<sup>3</sup>, 33.41 müNN) und (5430 m<sup>3</sup>, 37.449 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 30 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.3 skaliert
  - *Approximation 2:* mit 50 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.5 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.3 skaliert
  - *Approximation 3:* mit 100 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 3.2 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.3 skaliert
- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in der rechten Grenze des Approximationsintervalls

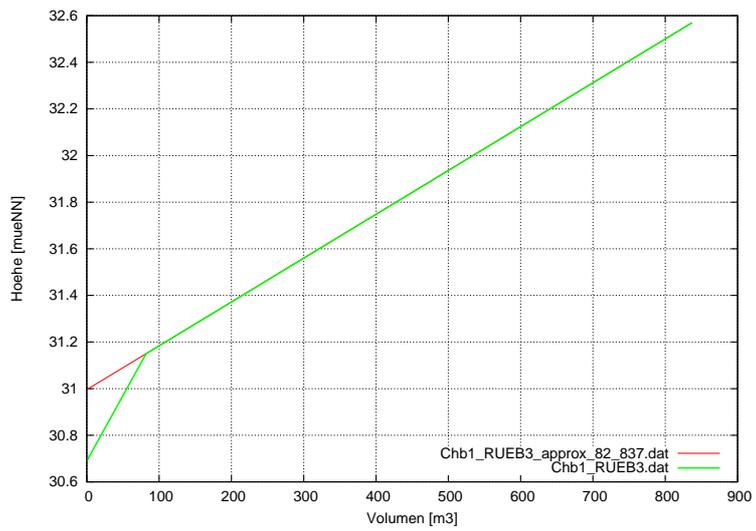
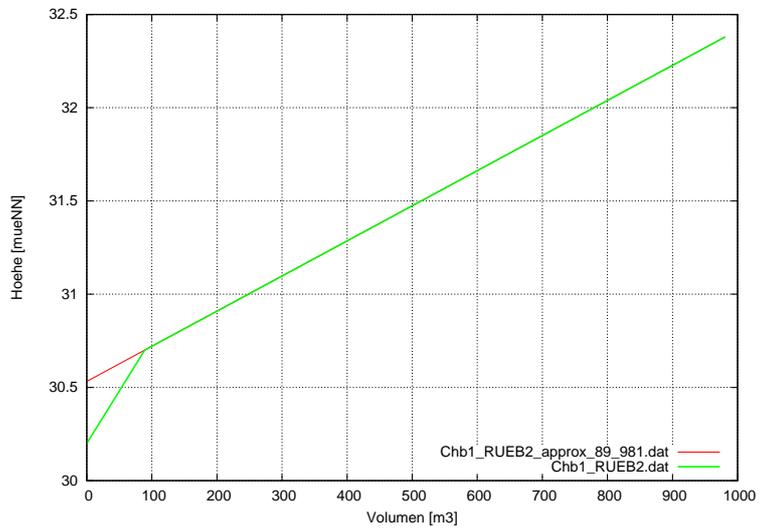




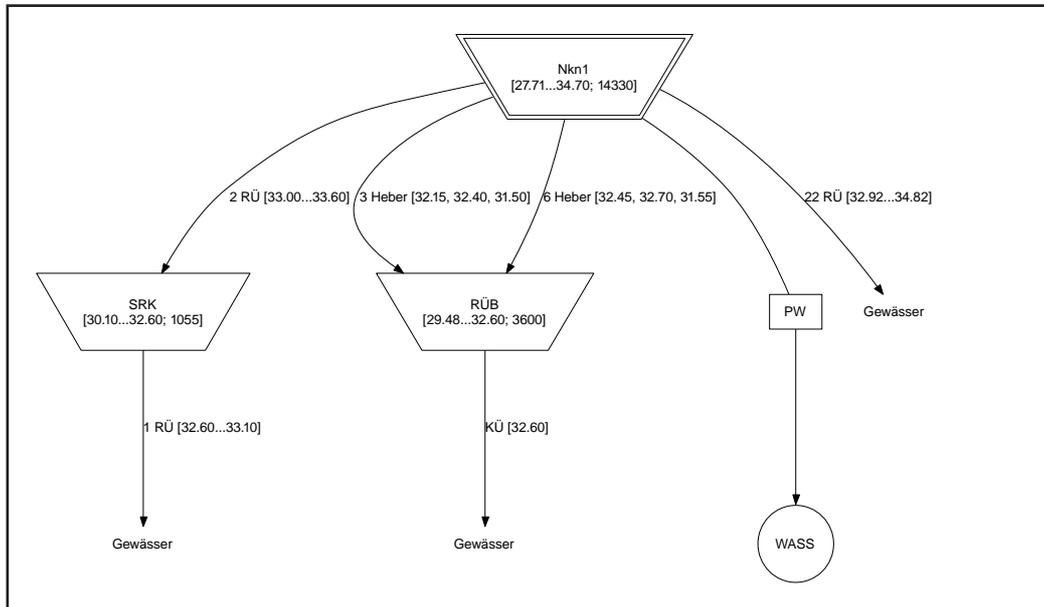
### RÜB1 Chb1, RÜB2 Chb1, RÜB3 Chb1

- 3 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit dem zweiten und dritten Stützpunkt





## Teilnetz Nkn1

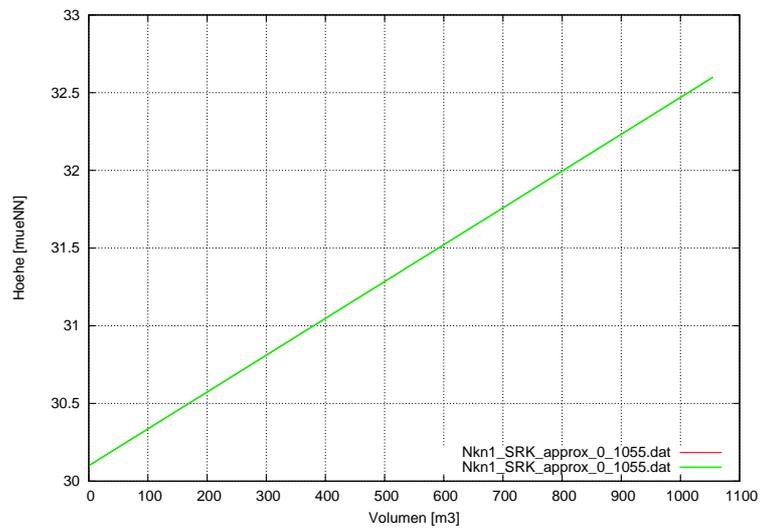
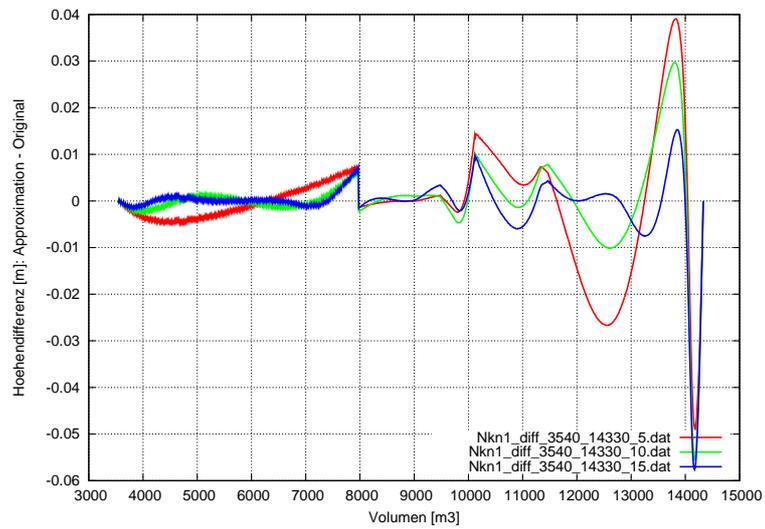
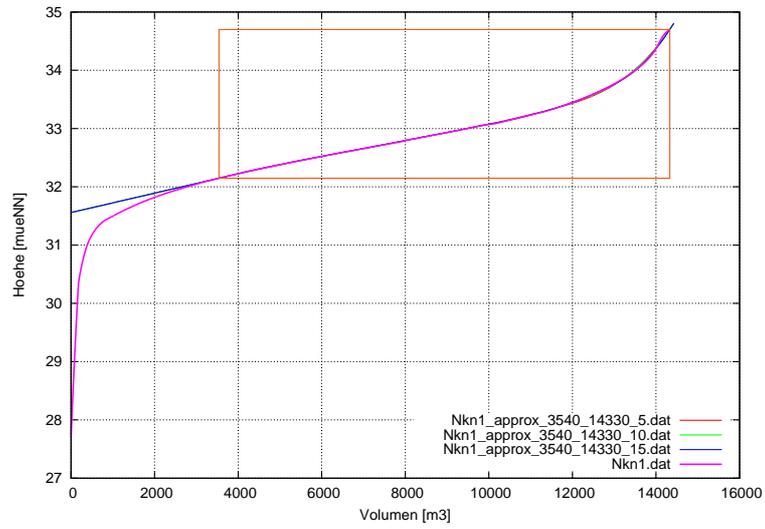


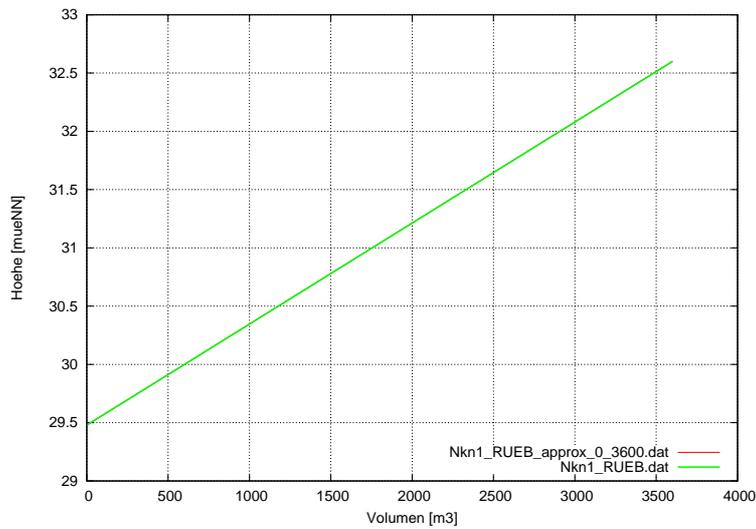
## Nkn1

- 1434 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $3540 \text{ m}^3$ , 32.149 müNN) und ( $14330 \text{ m}^3$ , 34.70002 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 5 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.9 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 2.0 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 15 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 2.0 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

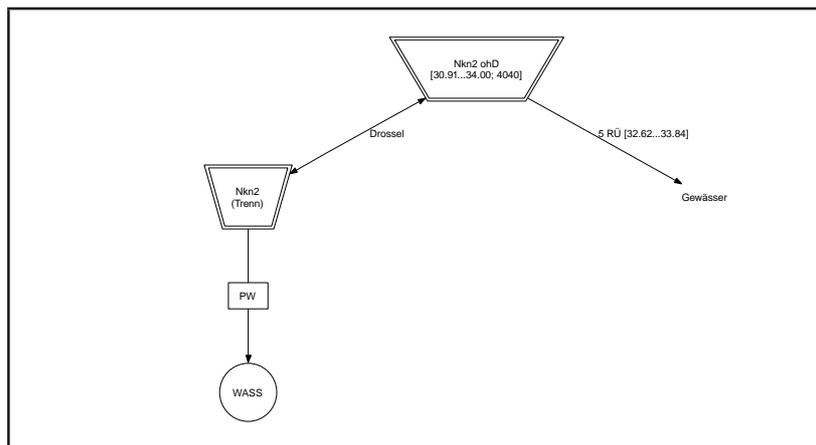
## SRK Nkn1, RÜB Nkn1

- 2 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den beiden Stützpunkten



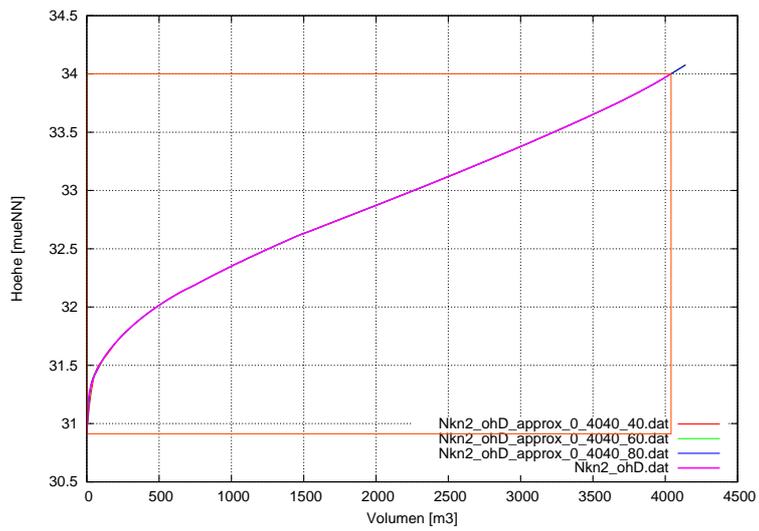
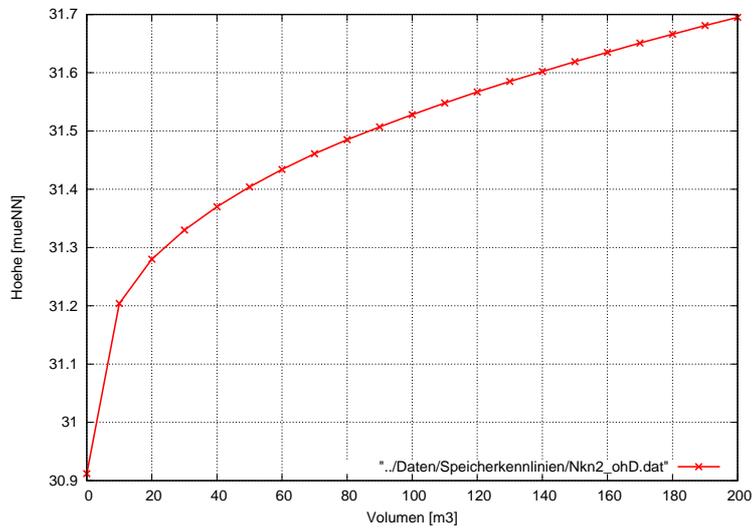


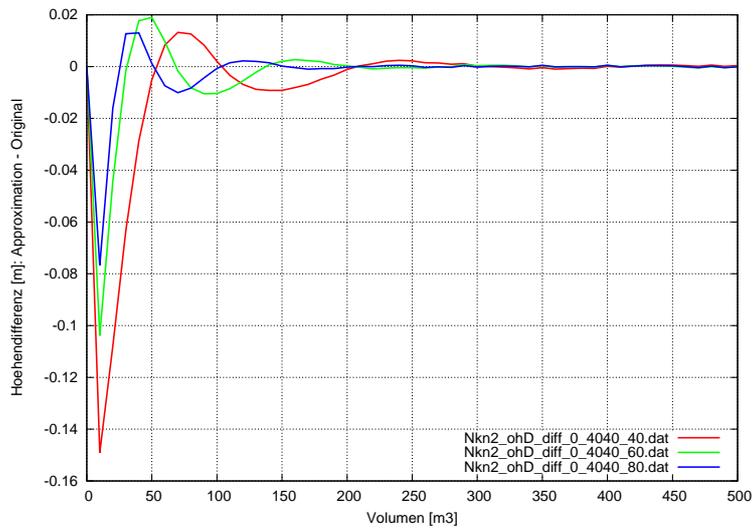
## Teilnetz Nkn2



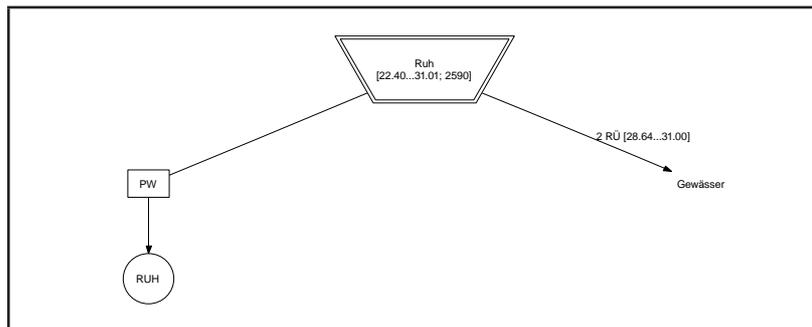
## Nkn2 ohD

- 405 Datenpaare
- *Besonderheit:* Sehr große Höhendifferenz vom ersten zum zweiten Stützpunkt
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (0 m<sup>3</sup>, 30.912 müNN) und (4040 m<sup>3</sup>, 34.00187 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 40 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.8 skaliert
  - *Approximation 2:* mit 60 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 2.5 skaliert
  - *Approximation 3:* mit 80 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 3.0 skaliert
- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in der rechten Grenze des Approximationsintervalls



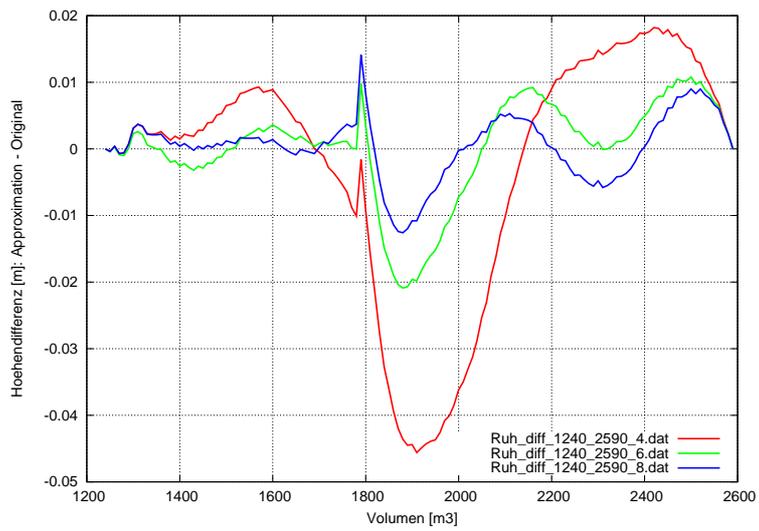
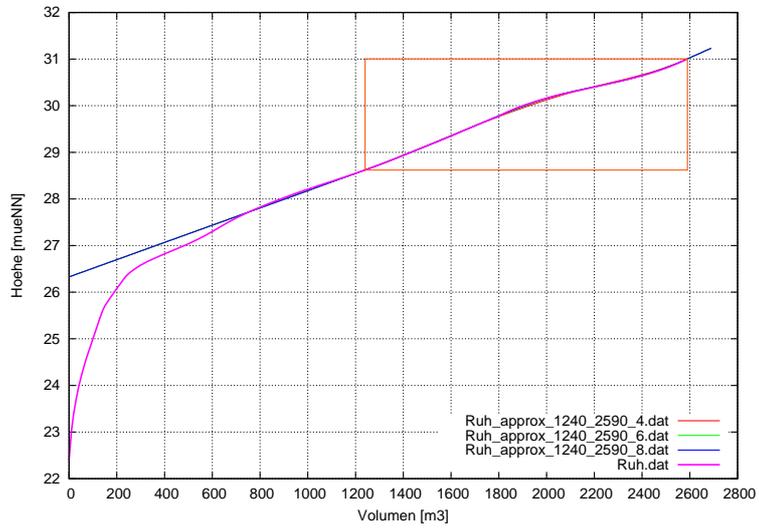


## Teilnetz Ruh

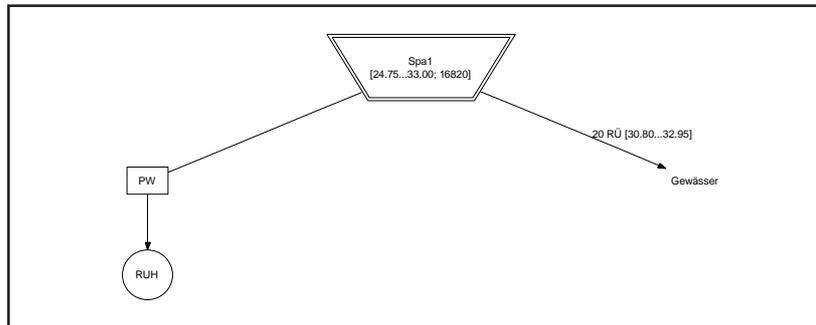


## Ruh

- 260 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $1240 \text{ m}^3$ , 28.622 müNN) und ( $2590 \text{ m}^3$ , 31.005 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 4 Stützstellen
  - *Approximation 2*: mit 6 Stützstellen
  - *Approximation 3*: mit 8 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

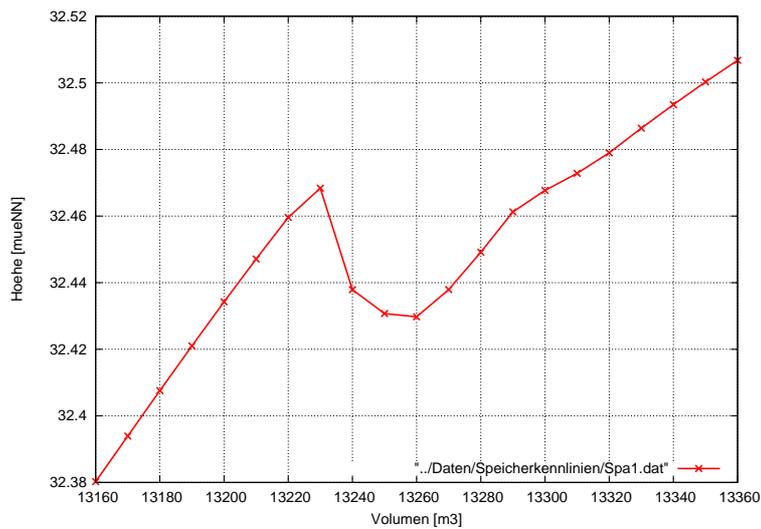


## Teilnetz Spa1

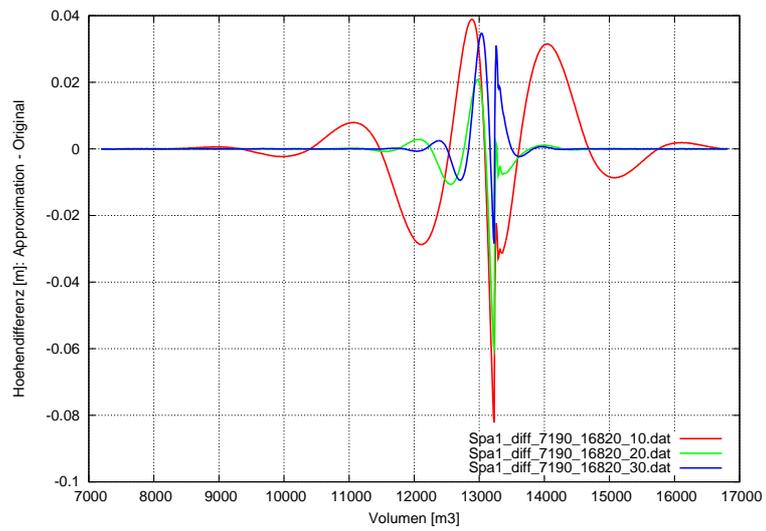
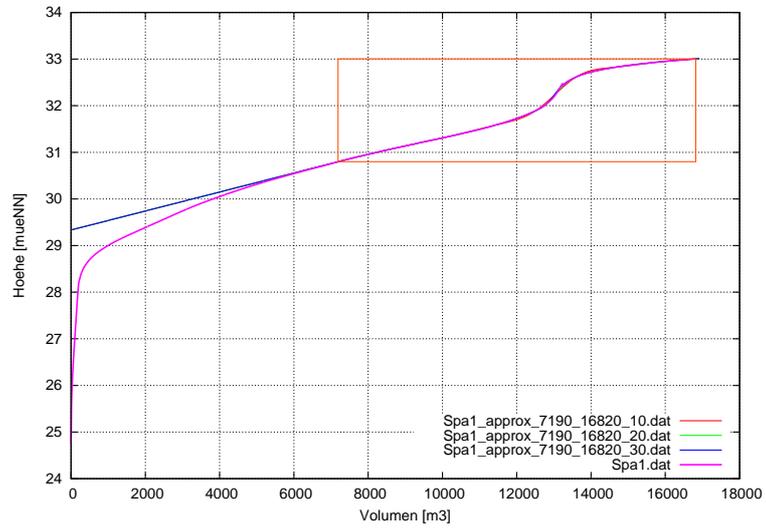


## Spa1

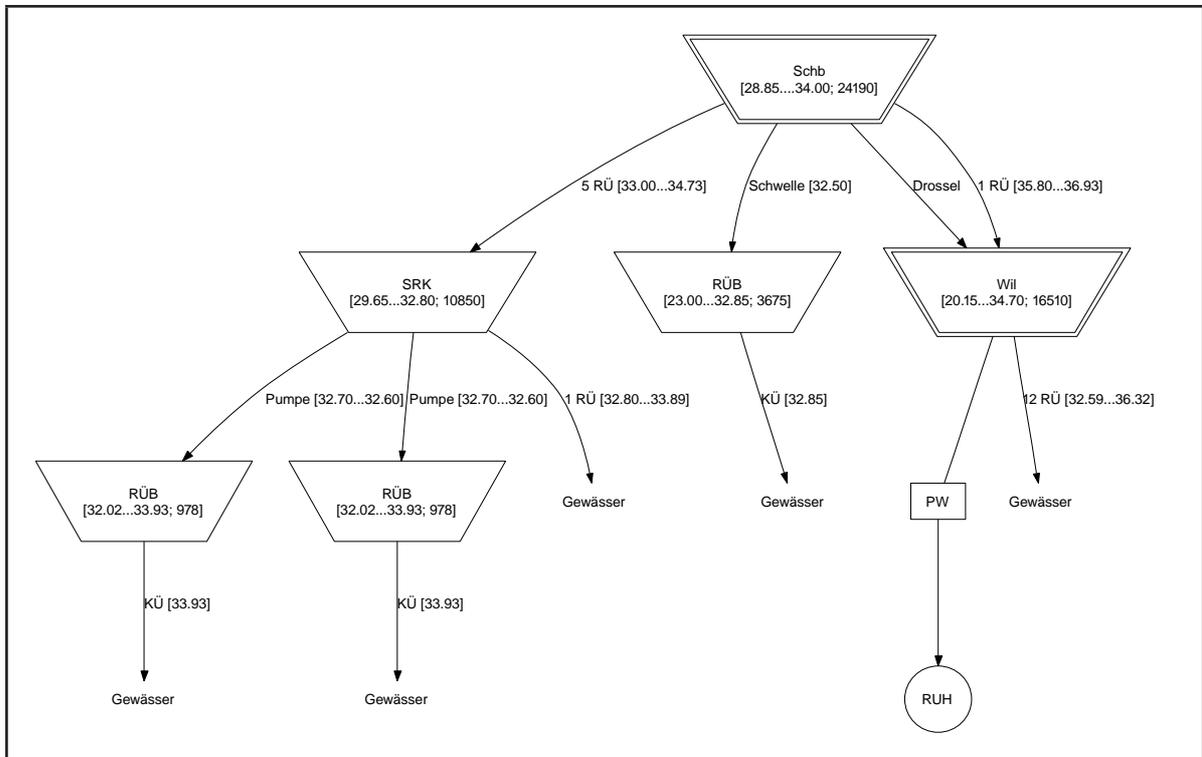
- 1683 Datenpaare
- *Besonderheit:* Ab 13230 m<sup>3</sup> gibt es einen Knick und fallende Werte.



- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich:* zwischen (7190 m<sup>3</sup>, 30.79926 müNN) und (16820 m<sup>3</sup>, 33.00445 müNN)
  - *Approximation 1:* mit 10 Stützstellen
  - *Approximation 2:* mit 20 Stützstellen
  - *Approximation 3:* mit 30 Stützstellen
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls



## Teilnetz Wil

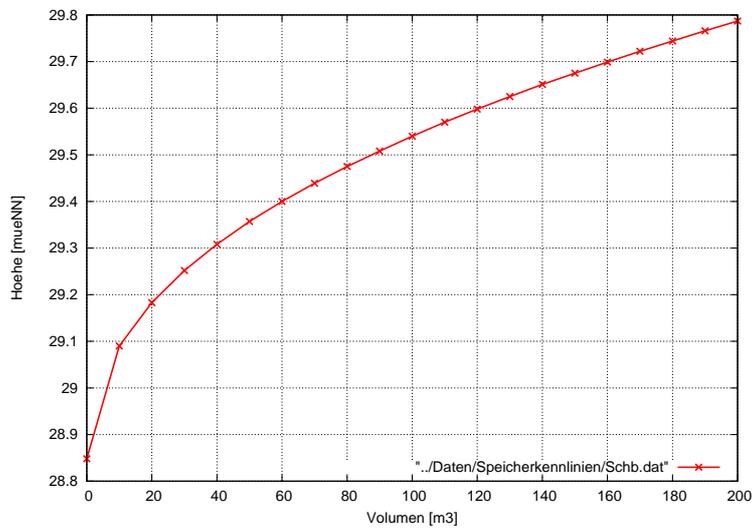
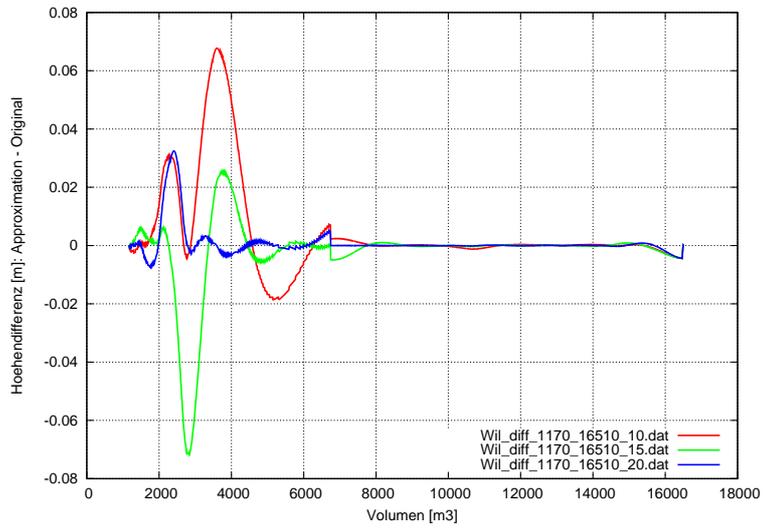
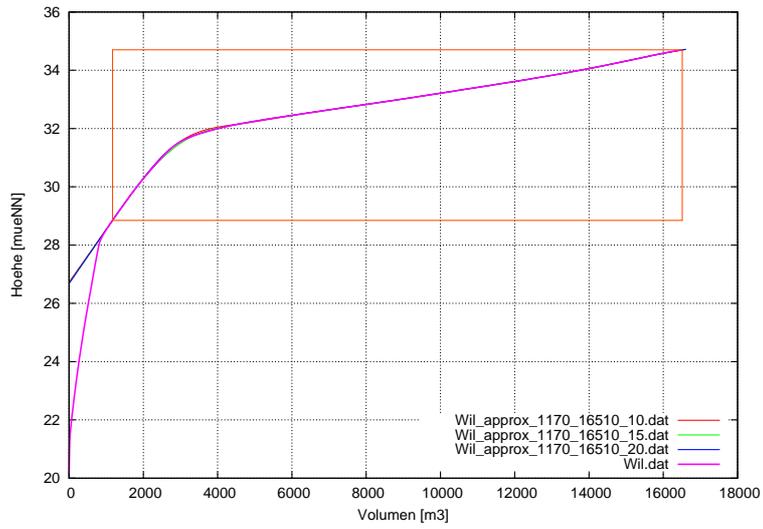


## Wil

- 1652 Datenpaare
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $1170 \text{ m}^3$ , 28.847 müNN) und ( $16510 \text{ m}^3$ , 34.70114 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.98 und Anstieg  $f'_n$  mit 1.5 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 10 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.5 skaliert
  - *Approximation 3*: mit 12 Stützstellen; Anstieg  $f'_n$  mit 1.5 skaliert
- lineare Extrapolation links und rechts mit der Steigung in den Grenzen des Approximationsintervalls

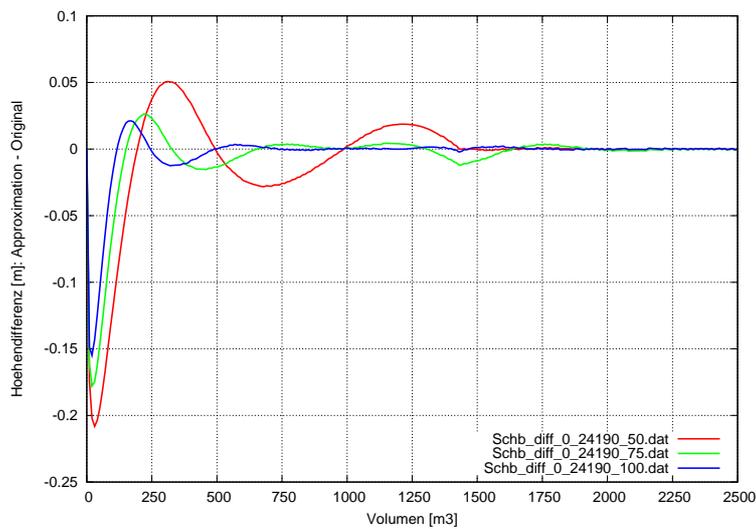
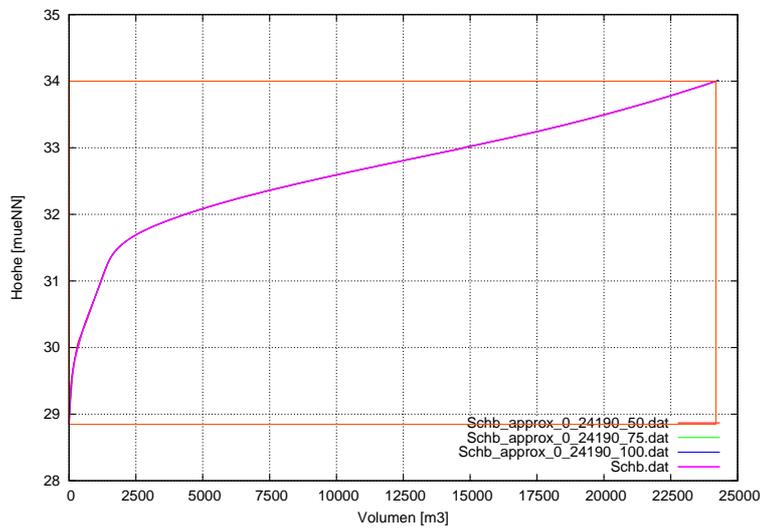
## Schb

- 2420 Datenpaare
- *Besonderheit*: Sehr große Höhendifferenz vom ersten zum zweiten Stützpunkt.
- Approximation durch kubische B-Splines mit äquidistanten Stützstellen
  - *Approximationsbereich*: zwischen ( $0 \text{ m}^3$ , 28.848 müNN) und ( $24190 \text{ m}^3$ , 34.0005 müNN)
  - *Approximation 1*: mit 50 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.75 skaliert
  - *Approximation 2*: mit 75 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 0.9 skaliert



– Approximation 3: mit 100 Stützstellen; Anstieg  $f'_0$  mit 1.05 skaliert

- lineare Extrapolation rechts mit der Steigung in der rechten Grenze des Approximationsintervalls

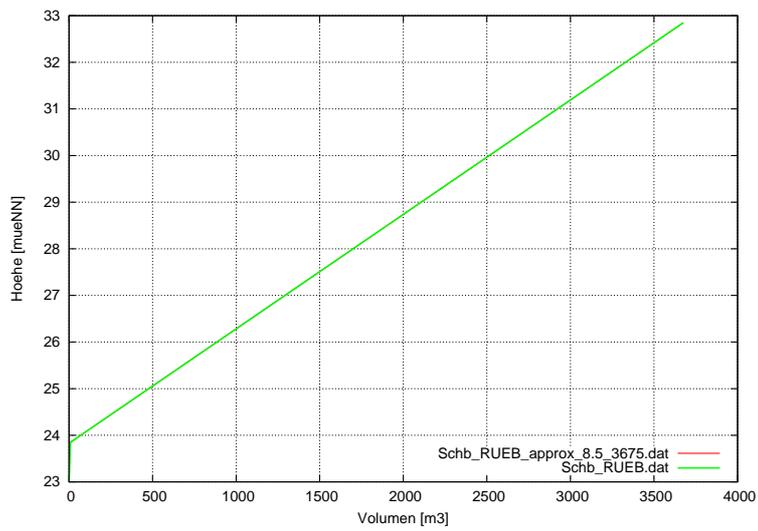
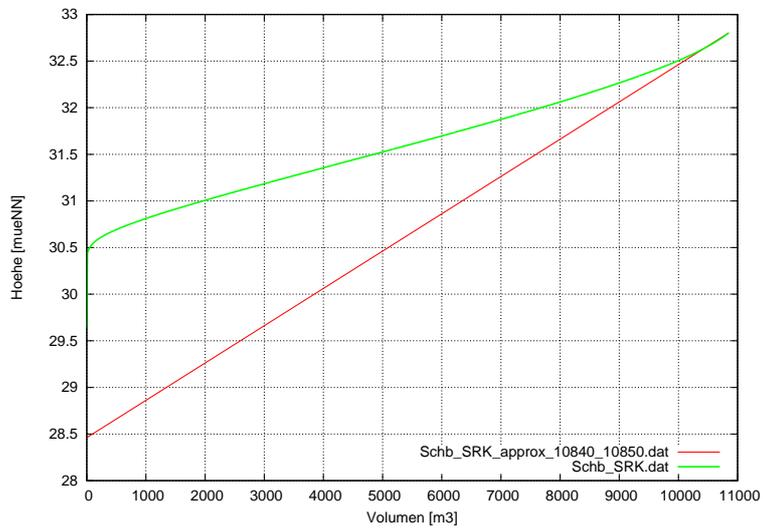


### SRK Schb

- 1086 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den letzten beiden Stützpunkten

### RÜB Schb

- 3 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den letzten beiden Stützpunkten



## RÜB Lützw2 SRK Schb, RÜB Lützw3 SRK Schb

- 2 Datenpaare
- lineare Approximation/Extrapolation mit den beiden Stützpunkten

